Dynamique des opérateurs sur les Grassmanniennes

Romuald Ernst

N° d'Ordre : D.U. 2402

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL
U.F.R. Sciences et Technologies

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES
N° 770

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

Spécialité :
MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

Par **ERNST Romuald**

Dynamique des opérateurs sur les Grassmanniennes

Soutenue publiquement le 03 décembre 2013, devant la commission d'examen :

Président :	Yanick Heurteaux	Professeur	
Examinateurs :	Frédéric Bayart	Professeur	(Directeur de Thèse)
	Isabelle Chalendar	Maître de Conférence (HDR)	(Rapporteur)
	Karl Grosse-Erdmann	Professeur	(Rapporteur)
	Stanislas Kupin	Professeur	
	Étienne Matheron	Professeur	

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier Frédéric Bayart pour m'avoir donné envie de faire de la recherche grâce à son cours de Géométrie des espaces de Banach et pour m'avoir proposé un sujet de Mémoire de M2 et un sujet de thèse passionnant. Pendant ces trois années, il a su me guider avec beaucoup de patience et je lui suis très reconnaissant pour les nombreux encouragements et conseils qu'il m'a prodigué. Je tiens également à lui témoigner ma reconnaissance pour sa gentillesse et son enthousiasme communicatif qui m'ont permis de reprendre espoir dans certains moments difficiles. Outre ses qualités humaines, je tiens à saluer l'immensité de ses connaissances Mathématiques, la finesse de son raisonnement ainsi que son sens aigu de la pédagogie. J'espère que trois ans à son contact auront suffit à m'imprégner de certaines de ses nombreuses qualités.

Je souhaite remercier sincèrement Yanick Heurteaux pour avoir accepté de présider mon jury de thèse et pour m'avoir enseigné avec passion quand j'étais étudiant. Je remercie également Karl Grosse-Erdmann et Isabelle Chalendar de m'avoir fait l'honneur de lire mon travail et d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je tiens aussi à remercier Stanislas Kupin et Étienne Matheron pour avoir accepté d'être présents au sein de mon jury.

Cette thèse est l'aboutissement de presque dix années d'études au Laboratoire de Mathématiques de Clermont-Ferrand et je tiens à remercier tous les enseignants qui m'ont formé pendant cette période et qui m'ont permis d'en arriver là. Je souhaite exprimer ma reconnaissance à tous les membres du laboratoire qui font de cet endroit un lieu convivial et presque familial. J'ai été honoré de la confiance et des responsabilités qui m'y ont été accordées. En particulier, je remercie chaleureusement Claude Tricot qui m'a fait confiance pendant quatre années d'enseignement à ses cotés ainsi que Christophe Bahadoran et Andrzej Stos qui se sont relayés pour m'accompagner dans cette tâche. Je remercie aussi Florent Madelaine et Kacem Nouini avec qui je n'ai enseigné qu'une année mais qui m'ont beaucoup appris. Je pense également à Arnaud Guillin, Mickael Heusener et François Martin pour leurs nombreux conseils et coups de pouce dans le cadre de l'organisation du Colloque Inter' Action. Enfin, je remercie Stéphane, mon grand frère de thèse que j'ai appris à connaitre au cours de plusieurs conférences et que je remercie pour ses paroles réconfortantes et pour les nombreux conseils dont il m'a éclairé.

J'ai une pensée particulière pour mes compagnons d'armes doctorants. En tout premier lieu, je remercie Colin, avec qui j'ai passé mes années sur les bancs de l'Université, pour m'avoir enseigné (entre autres choses) diverses façon de se changer les idées quand l'inspiration n'est pas au rendez-vous ainsi que Damien que j'ai rencontré en M2 et à qui je voue une grande estime. Je ne peux malheureusement pas nommer tous mes amis doctorants, je remercie donc la fédération des bureaux 1109, 1213, 2210 et les anciens locataires du bureau 2212 pour les nombreux moments passés en leur compagnie au coin d'un thé, en réunions d'organisation Inter' Actives ou tout simplement au séminaire des doctorants.

Je remercie aussi Cédric et Damien pour les nombreuses fois où ils ont dû se pencher quelques heures sur mon ordinateur pour comprendre ce que j'avais bien pu lui faire de mal. Je ne peux bien-sûr pas oublier toutes celles sans qui le laboratoire ne pourrait pas fonctionner. En premier lieu je tiens à remercier Annick qui a commencé à me chouchouter

dès l'année de préparation à l'agrégation et qui n'a pas faibli ensuite. Je remercie également Marie-Paule, Laurence et Séverine pour leur gentillesse, leur disponibilité, leurs gâteaux et toutes les petites attentions dont j'ai pu bénéficier. Il me reste à remercier Karine et Valérie qui se sont occupées de toutes les embuches administratives que je leur ai soumises pendant trois ans et qui ont toujours pris le temps de m'aider à n'importe quel moment et pour n'importe quel problème. Enfin, je les remercie pour le remarquable travail qu'elles ont fourni pour l'organisation du colloque Inter' Action en nous prodiguant des conseils et des avis qui se sont toujours révélés être bons.

Sur un plan plus personnel, je tiens sincèrement à remercier mes parents (au sens large) pour m'avoir toujours appuyé dans mes choix malgré les difficultés que cela engendrait. Je remercie également toute ma famille et mes amis pour leurs encouragements constants et leur soutien qui m'est cher.

Je remercie tout particulièrement Muriel qui a su rester stoïque les nombreuses soirées où mon esprit était ailleurs, m'encourager dans mes moments de doute et me changer les idées quand il fallait passer à autre chose. Merci pour ton amour, ton soutien, ta compréhension et ton infinie patience.

Table des matières

1 Introduction

1.1 Opérateurs hypercycliques

Depuis le début des années 1980 et la thèse de Kitai en 1982, les propriétés orbitales des opérateurs linéaires ont été largement étudiées. Les opérateurs hypercycliques en particulier sont au cœur des développements.

Définition 1.1. Un vecteur $x \in X$ est dit hypercyclique pour T si son orbite

$$\mathcal{O}(x,T) := \{T^n x, n \in \mathbb{N}\}$$

est dense dans X. L'ensemble des vecteurs hypercycliques pour l'opérateur T est noté $\mathcal{HC}(T)$. L'opérateur T est dit hypercyclique si $\mathcal{HC}(T) \neq \emptyset$.

La propriété d'hypercyclicité pour un opérateur est donc basée sur la densité de l'orbite d'un vecteur. C'est un cas particulier dans un cadre linéaire, de la notion d'universalité qui se définit pour des fonctions continues dans le cadre plus général des espaces topologiques.

Une notion bien connue et très étudiée dans le contexte des systèmes dynamiques est la notion de transitivité topologique. Cette propriété a été introduite en 1922 par Birkhoff et caractérise le fait qu'un système dynamique n'est pas décomposable en deux sous-systèmes dynamiques indépendants. En fait la transitivité topologique et l'hypercyclicité sont des propriétés équivalentes dans le cas où X est un espace séparable avec une base dénombrable d'ouverts et n'a pas de points isolés, c'est ce que l'on appelle le Théorème de Transitivité de Birkhoff.

Théorème de Transitivité de Birkhoff 1.2. *Soient X un F-espace séparable et T un opérateur linéaire continu sur X. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) T est hypercyclique

(ii) T est topologiquement transitif : pour tous ouverts non-vides U et V de X, il existe un entier n tel que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

De plus, dans ce cas $\mathcal{HC}(T)$ est un G_δ dense de X.

Ce théorème est d'une importance capitale en dynamique linéaire car il permet d'interpréter une condition de densité de l'orbite d'un vecteur en termes d'ouverts, c'est-à-dire qu'un opérateur est hypercyclique si et seulement si l'orbite de tout ouvert non-vide est dense dans X. Cette vision des choses est bien souvent la plus efficace.

D'autre part, il est bien connu que l'hypercyclicité est un phénomène purement infini dimensionnel. En effet, il est facile de vérifier qu'en dimension finie soit l'orbite d'un vecteur par une application continue tend vers l'infini en norme, soit elle reste bornée. Ceci exclut tout comportement hypercyclique dans un espace de dimension finie. Pour exhiber de tels opérateurs, il faut donc se tourner naturellement vers des espaces de dimension infinie.

La dynamique linéaire est un domaine récent qui a beaucoup évolué ces 30 dernières années. Bien que Birkhoff, MacLane et Rolewicz aient été des précurseurs du développement de la dynamique linéaire en distinguant des comportements hypercycliques dans la classe des opérateurs de translation sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, pour l'opérateur de dérivation sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ et pour certains multiples du décalage à gauche sur $\ell^2(\mathbb{N})$, la naissance de cette branche de l'analyse fonctionnelle a lieu avec la thèse de Kitai qui exhibe un critère d'hypercyclicité qui se révèle très efficace. Ce critère sera amélioré par plusieurs auteurs ensuite comme Gethner et Shapiro en 1987 puis Juan Bès en 1998 pour aboutir à la formulation actuelle :

Théorème (Critère d'Hypercyclicité) 1.3. *Soit X un espace de Banach séparable et $T \in \mathcal{L}(X)$. On dit que T satisfait le critère d'hypercyclicité s'il existe une suite strictement croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, deux ensembles denses $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset X$ et une suite d'applications $S_{n_k} : \mathcal{D}_2 \to X$ tels que :*

(a) $T^{n_k}x \to 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}_1$;

(b) $S_{n_k}y \to 0$ pour tout $y \in \mathcal{D}_2$;

(c) $T^{n_k}S_{n_k}y \to y$ pour tout $y \in \mathcal{D}_2$.

Sous ces conditions l'opérateur T est hypercyclique.

Dès lors, de nombreux auteurs se sont intéressés à ce sujet et le domaine a évolué de façon rapide. Cet intérêt, au début des années 1980, s'explique aussi par le fait que depuis la fin des années 1970 Per Enflo annonce pouvoir construire un opérateur ne possédant aucun sous-espace invariant sur un espace de Banach particulier. Son article, long et technique, ne sera finalement publié qu'en 1987 et apportera une réponse négative au problème du sous-espace invariant pour les espaces de Banach. En 1988, Charles Read donne une construction analogue d'un opérateur hypercyclique pour lequel tous les vecteurs non-nuls sont hypercycliques donnant une réponse négative au problème du sous-ensemble invariant pour la classe des espaces de Banach.

Le critère d'hypercyclicité, bien que très utile, n'est malheureusement qu'une condition suffisante comme l'ont montré De la Rosa et Read [16], Bayart et Matheron [7] ou encore Shkarin [49] qui ont tous donné des contre-exemples à la réciproque de ce théorème. Toutefois, les opérateurs qui vérifient ce critère sont appelés *faiblement mélangeants* car ils vérifient des conditions plus fortes que la simple hypercyclicité. Le théorème suivant, donné par Bès et Peris [12], exhibe des propriétés équivalentes à vérifier le critère d'hypercyclicité :

Théorème (Bès-Peris) 1.4. *Soit X un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(X)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) T satisfait le critère d'hypercyclicité.

(ii) T est héréditairement hypercyclique : il existe une suite strictement croissante $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour toute sous-suite $(m_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(T^{m_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ est hypercyclique.

(iii) T est faiblement mélangeant : $T \oplus T$ est hypercyclique.

Comme nous l'avons souligné précédemment, la plupart des opérateurs hypercycliques que nous connaissons vérifient les conditions du théorème précédent. Les seuls opérateurs hypercycliques connus qui ne les satisfont pas sont des exemples ad hoc ; nous ne connaissons donc pas de classe d'opérateurs hypercycliques qui ne sont pas faiblement mélangeants.

Illustrons ce critère avec une de ses conséquences. L'exemple ci-dessous est dû à Salas [46] en 1995 et caractérise l'hypercyclicité pour la classe des décalages pondérés.

Exemple 1.5. Soit B_w un décalage pondéré bilatéral de poids $w = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ défini par $B_w(e_n) = w_n e_{n-1}$ où $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la base canonique de $\ell^2(\mathbb{Z})$. Alors B_w est hypercyclique si et seulement si pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$$\liminf_{n\to+\infty} \max\left((w_1 \dots w_{n+q})^{-1}, (w_0 \dots w_{-n+q+1})\right) = 0.$$

Cette classe est l'une des plus importante en dynamique linéaire car ce sont des applications simples et pour lesquelles on peut effectuer des calculs explicites. Ceci permet souvent de comprendre certains mécanismes sous-jacents et de tester certaines idées. C'est l'une des raisons qui ont fait l'importance de ces opérateurs en dynamique linéaire.

D'un point de vue spectral, les opérateurs hypercycliques ont également des propriétés remarquables. Par exemple, on montre très facilement la proposition suivante qui lie le comportement de l'opérateur aux valeurs propres de son adjoint.

Proposition 1.6. *Si T est un opérateur hypercyclique, alors l'opérateur adjoint T^* n'admet pas de valeurs propres.*

Un autre résultat concernant le spectre des opérateurs hypercycliques est dû à Kitai et tire ses origines du fait qu'un opérateur soit contractant, soit expansif, ne peut pas être hypercyclique.

Théorème 1.7. *Si T est un opérateur hypercyclique, alors toute composante du spectre de T intersecte le cercle unité.*

Ce théorème est un premier exemple du rôle joué par les éléments de module 1 du spectre d'un opérateur hypercyclique. Ce lien a été fortement approfondi par Bayart et Grivaux en 2005 [4].

Un autre point très remarquable concernant la classe des opérateurs hypercycliques est qu'elle est stable par certaines transformations simples de l'opérateur.

Dans le cas où l'on s'intéresse à un opérateur qui peut se décomposer en une somme directe d'opérateurs, l'hypercyclicité est stable par restriction à un sous-opérateur.

Proposition 1.8. *Soient $T : X \to X$ et $S : Y \to Y$ deux opérateurs linéaires bornés. Si $T \oplus S$ est hypercyclique sur $X \oplus Y$ alors T (resp. S) est hypercyclique sur X (resp. Y).*

On peut encore se demander ce qu'il se passe si l'on remplace T par un opérateur "ressemblant" dans un sens à définir. On sait par exemple que les multiples d'un opérateur hypercyclique ne sont pas toujours hypercycliques. En effet, Rolewicz a montré le résultat suivant en 1969 [45] :

Proposition 1.9. *Soient B l'opérateur de décalage à gauche sur $\ell^2(\mathbb{N})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors λB est hypercyclique si et seulement si $|\lambda| > 1$.*

Toutefois Léon et Müller [38] ont montré que les choses se passent mieux si l'on multiplie un opérateur hypercyclique par un scalaire unimodulaire.

Théorème (Léon, Muller) 1.10. *Soient T un opérateur hypercyclique et λ un scalaire de module 1. Alors λT est hypercyclique et $\mathcal{HC}(T) = \mathcal{HC}(\lambda T)$.*

En 1995, Ansari [1] s'est posé la question de savoir ce qu'il se passe si l'on considère une puissance de l'opérateur. Ceci revient à "oublier" des itérations à intervalles réguliers par rapport à l'orbite de l'opérateur initial. De prime abord, il parait hasardeux de penser que tous les itérés d'un opérateur hypercyclique sont eux-mêmes hypercycliques. C'est pourtant ce qu'affirme le théorème suivant.

Théorème (Ansari) 1.11. *Soient T un opérateur hypercyclique et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors T^k est hypercyclique et $\mathcal{HC}(T) = \mathcal{HC}(T^k)$.*

Les propriétés de ces opérateurs sont assez bien connues maintenant, on pourra par exemple consulter les livres récents de Bayart et Matheron [7] et de Grosse-Erdmann et Peris [29] pour avoir une vision d'ensemble de la théorie.

1.2 Opérateurs supercycliques

En 1972, Hilden et Wallen [32] qui travaillent sur des classes d'opérateurs cycliques remarquent un comportement plus fort pour certains opérateurs de décalage pondéré. Ils introduisent alors les opérateurs supercycliques.

Définition 1.12. Un vecteur $x \in X$ est dit supercyclique pour T si

$$\{\lambda T^n x, n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K}\}$$

est dense dans X. L'ensemble des vecteurs supercycliques pour l'opérateur T est noté $\mathcal{SC}(T)$. L'opérateur T est dit supercyclique si $\mathcal{SC}(T) \neq \emptyset$.

Dans le même article, les auteurs exhibent certains opérateurs supercycliques en prouvant que l'adjoint d'un opérateur de décalage pondéré à gauche sur $\ell^2(\mathbb{N})$ est toujours supercyclique. De plus, ceux-ci remarquent également que la classe des opérateurs normaux ne contient pas d'opérateurs supercycliques et que dans le cas complexe la supercyclicité ne peut survenir que dans des espaces de dimension 1 ou de dimension infinie. Il faut ensuite attendre 20 ans, pour qu'en 1992, Herzog [31] complète ce théorème de Hilden et Wallen pour le cas des espaces réels.

Théorème (Herzog, 1992) 1.13. *Soit X un espace de Banach séparable réel. Alors il existe des opérateurs supercycliques sur X si et seulement si*

$$\dim(X) \in \{0, 1, 2\} \text{ ou } \dim(X) = \infty.$$

De plus, dans les cas où la dimension est finie, la caractérisation des opérateurs supercycliques est bien connue :
- Si $\dim(X) = 1$, tout opérateur non-nul est supercyclique.
- Si $\dim(X) = 2$, tout multiple d'un opérateur de rotation, d'angle libre avec π sur $\mathbb{Q}$ est supercyclique.

Herzog conclut ainsi l'étude des opérateurs supercycliques en dimension finie.

Comme dans le cas hypercyclique, on a un moyen pratique permettant de se ramener à des orbites d'ouverts.

Théorème de Transitivité de Birkhoff Supercyclique 1.14. *Soient X un F-espace séparable et T un opérateur linéaire continu sur X. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) T est supercyclique

(ii) pour tous ouverts non-vides U et V de X, il existe un entier n et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

De plus, dans ce cas $\mathcal{SC}(T)$ est un G_δ dense de X.

Là encore, on obtient la densité de l'ensemble des vecteurs supercycliques dès qu'un opérateur est supercyclique.

De la même façon que dans le cas hypercyclique, H.N. Salas [47] a exhibé un critère de supercyclicité.

Théorème (Critère de Supercyclicité) 1.15. *Soient X un espace de Banach séparable et $T \in \mathcal{L}(X)$. On dit que T satisfait le critère de supercyclicité s'il existe une suite strictement croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, deux ensembles denses $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset X$ et une suite d'applications $S_{n_k} : \mathcal{D}_2 \to X$ tels que :*

(a) $\|T^{n_k}x\|\|S_{n_k}y\| \to 0$ pour tous $x \in \mathcal{D}_1$ et $y \in \mathcal{D}_2$;

(b) $T^{n_k}S_{n_k}y \to y$ pour tout $y \in \mathcal{D}_2$.

Sous ces conditions l'opérateur T est supercyclique.

Ce n'est encore, là aussi, qu'une condition suffisante mais la caractérisation de Bès et Peris est aussi valable pour les opérateurs supercycliques.

Théorème 1.16. *Soit X un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(X)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) T satisfait le critère de supercyclicité.

(ii) $T \oplus T$ est supercyclique.

Pour illustrer le critère de supercyclicité, nous allons donner un théorème de caractérisation des décalages pondérés bilatéraux supercycliques. Cette caractérisation est encore due à Salas [47].

Exemple 1.17. Soit B_w un décalage pondéré bilatéral sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. Alors B_w est supercyclique si et seulement si pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$$\liminf_{n\to+\infty} (w_1 \dots w_{n+q})^{-1} \times (w_0 \dots w_{-n+q+1}) = 0.$$

En ce qui concerne les propriétés spectrales des opérateurs supercycliques, on gagne un peu en liberté par rapport au cas hypercyclique. En effet, on a le résultat suivant :

Proposition 1.18. *Si T est un opérateur supercyclique, alors l'opérateur adjoint T^* admet au plus une valeur propre. De plus, cette valeur propre est non-nulle.*

De plus, Feldman, Miller et Miller [20] ont remarqué qu'il existe une propriété analogue au Théorème 1.7 pour les opérateurs supercycliques.

Théorème du Cercle Supercyclique 1.19. *Soit T un opérateur supercyclique. Alors il existe un cercle centré en 0 qui intersecte toutes les composantes connexes du spectre de T. Un tel cercle est appelé un cercle de supercyclicité pour T.*

En fait, un grand nombre des propriétés connues pour les opérateurs hypercycliques possèdent un analogue supercyclique. Les théorèmes de stabilité cités auparavant pour les opérateurs hypercycliques sont encore vrais dans le cas supercyclique. Bien entendu, le Théorème de Léon-Müller devient trivial dans ce contexte mais le Théorème d'Ansari reste encore valable comme l'a montré Ansari [1].

1.3 Opérateurs n-supercycliques

Récemment, des auteurs ont tenté de généraliser la notion d'opérateur supercyclique. Le premier à l'avoir fait est Nathan Feldman [19] au début des années 2000, qui a introduit la notion d'opérateur n-supercyclique :

Définition 1.20. Un opérateur T est dit n-supercyclique, $n \geq 1$, si X possède un sous espace vectoriel de dimension n d'orbite dense. Le plus petit entier n tel que T est n-supercyclique est appelé l'indice de supercyclicité de T.

Ces opérateurs ont notamment été étudiés dans [13],[5] et [10]. On connait quelques résultats sur ces opérateurs, on sait par exemple en construire à partir d'opérateurs vérifiant le critère de supercyclicité comme l'a montré Feldman [19] :

Théorème 1.21. *[19] Si $T_1, \ldots, T_n$, $1 \leq n < \infty$ sont des opérateurs supercycliques sur des espaces de Banach séparables $X_1, \ldots, X_n$ et qui vérifient le critère de supercyclicité par rapport à la même suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, alors $\oplus_{k=1}^n T_k$ est n-supercyclique sur $\oplus_{k=1}^n X_k$.*

Comme dans les cas hypercycliques et supercycliques, on dispose également de quelques classes d'exemples d'opérateurs n-supercycliques. En effet, Bayart et Matheron [5] ont étudié la n-supercyclicité des opérateurs de décalages pondérés bilatéraux sur $\ell^p(\mathbb{Z})$ pour $1 \leq p < \infty$ et se sont aperçus que les notions de supercyclicité et de n-supercyclicité coïncident pour cette classe.

Théorème 1.22. *Pour un décalage pondéré bilatéral sur $\ell^p(\mathbb{Z})$, la n-supercyclicité est équivalente à la supercyclicité.*

Ceci n'est pas vérifié par toutes les classes d'exemples d'opérateurs n-supercycliques comme l'a montré Feldman avec l'exemple suivant.

Exemple 1.23. [19] Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $\{\Delta_k, 1 \leq k \leq n\}$ est une collection de disques ouverts, $S_k = M_z$ sur $L^2_a(\Delta_k)$ pour tout $1 \leq k \leq n$ et $S = \oplus_{k=1}^n S_k$, alors S^* est n-supercyclique.

De plus, si l'on choisit bien les disques ouverts, on peut s'assurer que l'opérateur construit dans cet exemple n'est pas $(n-1)$-supercyclique. Cependant, cette affirmation dépend de la structure du spectre d'un opérateur n-supercyclique. En effet, il existe plusieurs théorèmes qui donnent des conditions suffisantes pour que différents types d'opérateurs soient n-supercycliques, mais il existe également des résultats opposés, qui donnent des conditions suffisantes pour qu'un opérateur ne soit pas n-supercyclique. Le premier de ces résultats est un théorème sur la structure du spectre d'un opérateur n-supercyclique :

Théorème du Cercle n-Supercyclique 1.24. *Soit T un opérateur n-supercyclique, alors il existe n cercles $\Gamma_i = \{z : |z| = r_i\}$, $r_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, tels que pour tout sous-espace invariant $\mathcal{M}$ pour T^*, $\sigma(T^*|\mathcal{M}) \cap (\cup_{i=1}^n \Gamma_i) \neq \emptyset$. En particulier, chaque composante connexe du spectre de T intersecte $\cup_{i=1}^n \Gamma_i$.*

En particulier, si l'on se place dans le cas où $n = 1$, on retrouve le Théorème du Cercle bien connu pour les opérateurs supercycliques. Ce théorème peut permettre de montrer qu'un certain opérateur T n'est pas n-supercyclique ; c'est ce que l'on utilise pour montrer que l'on peut utiliser l'Exemple 1.23 pour exhiber un opérateur n-supercyclique qui n'est pas $(n-1)$-supercyclique. D'autre part, ce théorème exclut certaines classes d'opérateurs de la n-supercyclicité, ce qui rappelle des résultats connus pour les opérateurs supercycliques.

Théorème 1.25. *[19],[13] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un opérateur normal (ou sous-normal) sur un espace de Hilbert de dimension infinie n'est jamais n-supercyclique.*

En 2004, Bourdon, Feldman et Shapiro [13] ont remarqué qu'à l'instar des opérateurs hypercycliques et supercycliques, le spectre ponctuel de l'adjoint d'un opérateur n-supercyclique est contraint à ne pas être trop grand. En particulier, ils ont démontré le résultat suivant :

Théorème 1.26. *Si T est un opérateur n-supercyclique, alors T^* a au plus n valeurs propres comptées avec multiplicité.*

Un autre point commun avec les opérateurs supercycliques, remarqué là encore par Bourdon, Feldman et Shapiro, est que dans le cas complexe la n-supercyclicité est un phénomène infini dimensionnel.

Théorème 1.27. *Soit $n \geq 2$. Il n'existe pas d'opérateur $(n-1)$-supercyclique sur $\mathbb{C}^n$. En particulier, il n'existe pas d'opérateur k-supercyclique sur $\mathbb{C}^n$ pour tout $1 \leq k \leq n-1$.*

Une question subsiste quand même : on sait que le théorème ci-dessus est vrai également sur $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$ dans le cas des opérateurs supercycliques, on peut alors légitimement se demander ce qu'il en est pour les opérateurs n-supercycliques ! On a déjà souligné qu'il est bien connu qu'une rotation d'angle irrationnel est supercyclique sur $\mathbb{R}^2$. On a alors un début de réponse à la question ci-dessus en remarquant que sur $\mathbb{R}^3$, une rotation d'angle irrationnel autour d'une droite est 2-supercyclique. Nous reviendrons sur cette question dans le chapitre 2.

1.4 Opérateurs fortement n-supercycliques

On a vu qu'un certain nombre de propriétés des opérateurs supercycliques se généralisent plutôt bien au cas des opérateurs n-supercycliques mais un certain nombre de questions restent en suspens. En effet, on peut se demander s'il existe un équivalent au Théorème de Transitivité de Birkhoff, un critère de n-supercyclicité, si les "éléments n-supercycliques" pour un opérateur n-supercyclique forment un G_δ dense (dans un sens et un espace à définir) ou encore si le Théorème d'Ansari reste vrai pour ce type d'opérateurs. Ces questions sont "plus difficiles" que les précédentes car X n'est pas le cadre naturel pour étudier l'orbite de sous-espaces de dimension n. C'est pour cela qu'en 2008, Shkarin

[48] a introduit la notion d'opérateur fortement n-supercyclique qui demande une condition plus forte que la n-supercyclicité. Nous allons commencer par introduire certaines notions qui nous permettront de définir la forte n-supercyclicité.

Notation et Définition. Si X est de dimension supérieure à $n \in \mathbb{N}^*$, on peut définir une topologie sur l'espace des Grassmanniennes de dimension n, noté $\mathbb{P}_n(X)$, qui est l'ensemble des sous-espaces de dimension n de X. Pour cela, nous notons X_n l'ensemble (ouvert) de tous les n-uplets $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ de vecteurs linéairement indépendants et on munit X_n de la topologie induite par restriction de celle sur X^n. On peut alors définir l'application $\pi_n : X_n \to \mathbb{P}_n(X)$ par $\pi_n(x) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. On définit la topologie sur $\mathbb{P}_n(X)$ comme étant la topologie la moins fine qui rende π_n continue et ouverte.

Nous pouvons maintenant définir la forte n-supercyclicité.

Définition 1.28. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un sous-espace vectoriel L de dimension n est dit fortement n-supercyclique pour T si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T^k(L)$ est de dimension n et si son orbite

$$\mathcal{O}(L,T) := \{T^n(L), n \in \mathbb{N}\}$$

est dense dans $\mathbb{P}_n(X)$. L'ensemble des sous-espaces n-supercycliques pour l'opérateur T est noté $\mathcal{ES}_n(T)$. L'opérateur T est dit fortement n-supercyclique si $\mathcal{ES}_n(T) \neq \emptyset$.

Remarque 1.29.

a) Dans cette définition et dans toute la suite nous ne ferons pas de distinction dans les notations entre L vu comme sous-espace de X et L vu comme élément de $\mathbb{P}_n(X)$.

b) Il est clair que $\mathbb{P}_n(X)$ est un espace de Baire car l'application π_n qui permet de définir sa topologie est continue et ouverte.

Après avoir défini les opérateurs fortement n-supercycliques, Shkarin [48] a énoncé le résultat suivant :

Théorème (Ansari-Shkarin) 1.30. *Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathcal{ES}_n(T) = \mathcal{ES}_n(T^k)$ et en particulier, T est fortement n-supercyclique si et seulement si T^k est fortement n-supercyclique.*

Ce théorème est une réponse partielle à la question que l'on se posait auparavant pour les opérateurs n-supercycliques car les opérateurs fortement n-supercycliques forment une sous-classe des opérateurs n-supercycliques. En particulier, ces derniers héritent des propriétés connues pour les opérateurs n-supercycliques. Cependant, un des espoirs de Shkarin en introduisant cette nouvelle classe d'opérateurs était que tout opérateur n-supercyclique soit fortement n-supercyclique. Il pose d'ailleurs la question dans son article [48] de savoir si ces deux notions sont équivalentes. En effet, une réponse positive à cette question résoudrait le problème du Théorème d'Ansari pour les opérateurs n-supercycliques en y apportant une réponse positive.

1.5 Opérateurs co-fortement n-supercycliques

Suite à l'introduction par Shkarin de la notion d'opérateur fortement n-supercyclique, une question qui se pose est celle de savoir si l'on peut généraliser ces opérateurs en itérant sur des sous-espaces de dimension infinie. Bien sûr, il faut se restreindre à un certaine classe de sous-espaces de dimension infinie pour espérer pouvoir définir une telle notion. Nous avons choisi de nous restreindre à une classe "duale" de celle des espaces de dimension finie, celle des espaces de codimension finie. Il nous faut à présent définir l'espace topologique sur lequel nous allons itérer notre opérateur. L'ensemble est facile à intuiter, c'est l'ensemble des sous-espaces de codimension n. Il est ensuite nécessaire de munir cet ensemble d'une topologie adéquate. Donnons au préalable une définition de l'ensemble sur lequel nous allons étudier les opérateurs en question.

Notation et Définition. Soit X un espace de Banach séparable et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle n-ième co-Grassmannienne de X, notée $\mathbb{P}_n^{co}(X)$, l'ensemble de tous les sous-espaces fermés de codimension n dans X. On note X_n^* l'ensemble des n-uplets de vecteurs de X^* qui forment une famille indépendante et on munit cet ensemble de la topologie induite par celle de X^{*n}. Enfin, on munit $\mathbb{P}_n^{co}(X)$ de la topologie la moins fine qui rende les applications $\Pi_n : X_n^* \to \mathbb{P}_n^{co}(X)$ avec $\Pi_n(x_1^*, \ldots, x_n^*) = \cap_{i=1}^n \ker(x_i^*)$ continues et ouvertes.

Après avoir donné la définition de l'espace des co-Grassmanniennes, nous pouvons à présent définir la co-forte n-supercyclicité d'une façon analogue à celle de la forte n-supercyclicité.

Définition 1.31. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et T un opérateur linéaire sur X. Un sous-espace vectoriel fermé M de codimension n est dit co-fortement n-supercyclique pour T si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\overline{T^k(M)}$ est de codimension n et si l'ensemble $\left\{\overline{T^k(M)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ est dense dans $\mathbb{P}_n^{co}(X)$. Dans ce cas, l'opérateur T est dit co-fortement n-supercyclique.

1.6 Résumé

L'objectif de cette thèse est de développer la dynamique des opérateurs sur des sous-espaces et en particulier sur les Grassmanniennes. L'étude de la dynamique sur des sous-espaces a débuté au début des années 2000 avec Feldman puis s'est poursuivie avec l'introduction par Shkarin de principes de dynamique sur des Grassmanniennes. Nous nous intéressons également à d'autres notions de dynamique comme la chaoticité.

La fin du premier chapitre est consacrée à l'établissement des premières propriétés sur la forte n-supercyclicité. Cela nous permet de également de justifier l'intérêt porté à ces opérateurs en soulignant les propriétés qu'ils partagent avec les opérateurs hypercycliques et supercycliques mais que n'ont pas les opérateurs n-supercycliques. Enfin, comme Shkarin l'a énoncé sans démonstration, nous terminons ce chapitre en donnant une preuve du fait que les opérateurs fortement n-supercycliques ont la propriété d'Ansari. Cette preuve anticipe sur quelques résultats que nous établissons au cours de cette thèse.

Dans le chapitre 2, nous complétons l'étude de la n-supercyclicité, entamée par Bourdon, Feldman et Shapiro [13] dans le cas complexe, et donnons une caractérisation des entiers n pour lequel il existe un opérateur n-supercyclique en dimension finie dans le cas réel. Ce résultat est un corollaire d'un théorème technique qui caractérise le meilleur indice de supercyclicité pour certains types d'opérateurs. La preuve de ce résultat repose sur la décomposition de Jordan d'un opérateur et sur une réduction de la base d'un espace sur lequel on itère l'opérateur. Nous commencerons par définir ce que l'on appelle décomposition de Jordan, puis nous montrerons sur un exemple en quoi consiste la réduction de base d'un sous-espace en exhibant son utilité dans un cas particulier. Cette réduction est très importante pour la suite car elle permet de rendre efficace la décomposition de Jordan, c'est pourquoi nous détaillerons le principe de cette réduction dans une troisième partie et nous définirons certaines notations qui nous suivrons jusqu'à la fin du chapitre. Nous divisons la suite du chapitre en plusieurs parties, chacune d'elles traitant un cas particulier du problème général jusqu'à obtenir le théorème de classification suivant :

Théorème A 1.32. *Soit $N \geq 2$. Il n'existe pas d'opérateur $(\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor - 1)$-supercyclique sur $\mathbb{R}^N$. De plus, cette valeur est optimale : il existe toujours un opérateur $(\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor)$-supercyclique sur $\mathbb{R}^N$.*

De plus, le théorème technique qui implique le théorème ci-dessus donne une classification partielle des opérateurs sur un espace réel de dimension finie qui sont n-supercycliques à n fixé.

Le deuxième objectif de ce chapitre est de compléter l'étude des opérateurs fortement n-supercycliques en dimension finie. Après avoir traité le cas de la dimension 4 "à la main", nous montrerons que la forte n-supercyclicité est un phénomène infini dimensionnel.

Théorème B 1.33. *Pour $N \geq 3$, il n'existe pas d'opérateurs fortement n-supercycliques sur $\mathbb{R}^N$ pour $1 \leq n < N$.*

Dans le chapitre 3, nous approfondirons l'étude préliminaire que nous avons faite sur les opérateurs fortement n-supercycliques. Nous nous intéresserons tout d'abord à leurs propriétés spectrales. En particulier, nous montrerons la version fortement n-supercyclique suivante du Théorème du Cercle :

Théorème C 1.34. *Soient X un espace de Banach complexe et T un opérateur fortement n-supercyclique sur X.*
Alors on peut décomposer $X = F \oplus X_0$, avec F et X_0 T-stables, F de dimension finie inférieure ou égale à n. D'autre part, il existe $R \geq 0$ tel que le cercle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ intersecte chaque composante du spectre de $T_0 := T_{|X_0}$.

Dans un second temps, nous nous intéressons aux opérateurs de composition sur l'espace de Hardy du disque et nous donnons une classification des homographies de $\mathbb{D}$ qui sont fortement n-supercycliques :

Théorème D 1.35. *Soit ϕ une homographie de $\mathbb{D}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) C_ϕ est hypercyclique

(ii) C_ϕ est supercyclique

(iii) C_ϕ est fortement n-supercyclique

Pour mener à bien cette classification, nous aurons besoin d'adapter le Théorème de l'angle supercyclique que Gallardo-Gutiérrez et Montes-Rodríguez ont utilisé pour étudier la supercyclicité de certains opérateurs de composition.

Nous étudierons ensuite les liens qui existent entre la forte n-supercyclicité, la forte $(n-1)$-supercyclicité et la forte $(n+1)$-supercyclicité. Pour commencer, nous montrerons que l'on peut construire un opérateur T dont les indices de forte supercyclicité Λ_T forment n'importe quel intervalle des nombres entiers infini à droite. Nous adaptons ensuite cette construction pour obtenir le résultat plus général suivant :

Théorème E 1.36. *Soient X un espace de Banach et $n \geq 2$. Alors il existe un opérateur linéaire continu T qui est fortement m-supercyclique si $m \geq n$ mais qui n'est pas m-supercyclique si $m < n$.*

Après cela, la question naturelle est de savoir si cet ensemble Λ_T est toujours infini à droite. Pour répondre à cette question, nous reprenons des idées de De La Rosa et Read [16] qui ont fourni le premier exemple de construction d'un opérateur hypercyclique qui n'est pas faiblement mélangeant. En fait, nous suivons la démarche de Bayart et Matheron [6] qui ont adapté la construction précédente sur des espaces classiques.

Théorème F 1.37. *Il existe un opérateur supercyclique qui n'est pas fortement h -supercyclique pour tout $h \geq 2$.*

Le chapitre 4 est consacré à l'introduction d'une nouvelle classe d'opérateurs appelés co-fortement n-supercycliques. Cette classe est construite à partir des mêmes idées que celle des opérateurs fortement n-supercycliques mais on s'intéresse, dans ce cas là, à l'orbite de sous-espaces de codimension n. Bien que cette notion soit plus délicate à manipuler, nous rapprochons les propriétés dynamiques sur des sous-espaces de dimension finie de celles sur des sous-espaces de codimension finie de plusieurs manières. En particulier, on montre :

Théorème G 1.38. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et soit T un opérateur borné inversible sur un espace de Banach séparable X. Alors T est co-fortement n-supercyclique sur X si et seulement si T^{-1*} est fortement n-supercyclique sur X^*.*

On montre ensuite que pour la classe des décalages pondérés et pour $n = 1$, on peut s'affranchir de l'hypothèse d'inversibilité ci-dessus.

Théorème H 1.39. *Soit B_w borné sur $\ell^p(\mathbb{Z})$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) B_w est co-fortement 1-supercyclique sur $\ell^p(\mathbb{Z})$.

b) $B_w^{-1*} = B_{\frac{1}{w}}$ est supercyclique sur $\ell^q(\mathbb{Z})$.

c) Il existe une suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$$\max_{-q\leq\alpha\leq q}\left(\prod_{i=1}^{\alpha+N_k} w_i\right) \times \max_{-q\leq\alpha\leq q}\left(\prod_{i=0}^{\alpha-N_k+1} w_i\right)^{-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dans un cinquième chapitre, nous nous intéressons à un autre aspect de dynamique linéaire : les opérateurs chaotiques. En 2000, Grosse-Erdmann a caractérisé les opérateurs de décalage pondéré chaotiques sur les espaces de suites dont la base canonique est inconditionnelle [28]. Nous complétons ce théorème en donnant une caractérisation de ces opérateurs sur une certaine classe d'espaces de suites sans base inconditionnelle introduite par Lohman et Casazza[40]. Cette classe généralise la construction de l'espace de James faite par James en 1950 [34], [35].

Dans l'Annexe A, nous présentons un critère de supercyclicité qui s'applique aux opérateurs non-bornés et qui nous permet de caractériser les décalages pondérés supercycliques bornés ou non. Ce résultat nous est utile pour le chapitre 4.

Enfin, dans l'Annexe B, nous montrons que sur un espace de Banach muni d'une mesure gaussienne invariante par un opérateur T, T est fortement mélangeant si et seulement si T est multiple mélangeant de tout degré. Ce résultat généralise d'une part un théorème de Totoki [51] qui a montré un résultat similaire pour les processus gaussiens et d'autre part un théorème de Bayart et Matheron qui caractérise les opérateurs fortement mélangeants en termes d'opérateur de covariance.

1.7 Quelques premières propriétés sur les opérateurs fortement n-supercycliques

Lorsqu'on s'intéresse aux opérateurs hypercycliques, on fait souvent appel à la notion de transitivité topologique qui est en général plus maniable car c'est une propriété qui porte sur l'orbite d'ouverts de X plutôt que sur l'orbite de vecteurs. Il serait agréable de disposer d'un tel outil pour la forte n-supercyclicité et le but de ce paragraphe est de nous fournir cet outil et d'en tirer quelques conséquences. Nous donnerons aussi diverses propriétés qui permettent de se faire une idée un peu plus précise de la notion de forte n-supercyclicité. La propriété qui suit est un résultat de densité très simple qui nous permet de travailler sur X^n plutôt que sur X_n qui est un espace peu structuré et qui sera d'utilisation constante dans la suite.

Proposition 1.40. *X_n est dense dans X^n.*

Preuve :

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$ et $V_1, \dots, V_n$ des voisinages ouverts dans X de $x_1, \dots, x_n$. Il nous suffit de montrer qu'il existe $y \in X_n \cap (V_1 \times \cdots \times V_n)$. Soit p le plus grand entier tel que $\{x_1, \dots, x_p\}$ soit libre. Si $p = n$, alors il n'y a rien à faire. Sinon par définition de p, $\mathrm{Vect}\{x_1, \dots, x_p\}$ est un sous-espace vectoriel de X de dimension p, donc il existe $y_{p+1} \in V_{p+1} \setminus \mathrm{Vect}\{x_1, \dots, x_p\}$ car V_{p+1} est un ouvert d'un espace de dimension n et $p < n$. On peut réitérer ce raisonnement et construire une famille $y_{p+1}, \dots, y_n$ telle que :
$(x_1, \dots, x_p, y_{p+1}, \dots, y_n) \in (V_1 \times \cdots \times V_n) \cap X_n$.

□

Remarque 1.41. Nous utiliserons également plusieurs fois le résultat suivant dont la preuve est évidente : si U est un ouvert de X_n et si L est un sous-espace vectoriel de X de dimension n, alors $(L \times \cdots \times L) \cap U \neq \emptyset \Leftrightarrow L \in \pi_n(U)$.

Grâce à la proposition précédente, on peut maintenant traduire la forte n-supercyclicité par des propriétés de densité sur X^n plutôt que sur $\mathbb{P}_n(X)$.

Proposition 1.42. *On a équivalence entre les assertions suivantes :*

(i) T est fortement n-supercyclique ;

(ii) Il existe un sous-espace vectoriel L de X de dimension n tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $T^i(L)$ est de dimension n et :

$$\mathcal{B} := \cup_{i=1}^{\infty} \pi_n^{-1}(T^i(L)) \text{ est dense dans } X^n;$$

(iii) Il existe un sous-espace vectoriel L de X de dimension n tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $T^i(L)$ est de dimension n et :

$$\mathcal{E} := \cup_{i=1}^{\infty}(T^i(L) \times \cdots \times T^i(L)) \text{ est dense dans } X^n.$$

Preuve :

• $(i) \Rightarrow (ii)$:

Comme T est fortement n-supercyclique, il existe un sous espace vectoriel L de dimension n dont l'orbite est dense par T dans $\mathbb{P}_n(X)$. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X_n$, $M := \pi_n(x) \in \mathbb{P}_n(X)$ et V un voisinage ouvert de x dans X_n. Comme π_n est une application ouverte, $W := \pi_n(V)$ est un voisinage ouvert de M dans $\mathbb{P}_n(X)$. Comme L est fortement n-supercyclique pour T, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $T^k(L) \in W$. Par conséquent, il existe $y \in V$ tel que $\pi_n(y) = T^k(L)$ et ainsi $y \in \pi_n^{-1}(T^k(L)) \subset \mathcal{B}$. Donc $\mathcal{B}$ est dense dans X_n. Or, comme X_n est dense dans X^n, $\mathcal{B}$ est dense dans X^n.

• $(i) \Leftarrow (ii)$:

$\mathcal{B}$ est un sous-ensemble de X_n, dense dans X^n. Par conséquent, $\mathcal{B}$ est dense dans X_n. De plus, comme π_n est continue et surjective, $\pi_n(\mathcal{B})$ est dense dans $\mathbb{P}_n(X)$. Or $\pi_n(B) = \cup_{i=1}^{\infty} T^i(L)$, donc T est fortement n-supercyclique.

• $(ii) \Rightarrow (iii)$:

Par définition de π_n, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\pi_n^{-1}(T^k(L)) \subset T^k(L) \times \cdots \times T^k(L) \subset X^n$ et donc $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ donc $\mathcal{E}$ est dense dans X^n.

• $(ii) \Leftarrow (iii)$:

Soit U un ouvert non-vide de X^n. Comme X_n est un ouvert dense de X^n, $X_n \cap U$ est un ouvert non-vide de X^n et comme $\mathcal{E}$ est dense dans X^n, il existe $x \in \mathcal{E} \cap X_n \cap U = X_n \cap (\cup_{i=1}^{\infty} T^i(L) \times \cdots \times T^i(L)) \cap U$. Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \cap X_n \cap (T^k(L) \times \cdots \times T^k(L)) \cap U$ et ainsi $\pi_n(x) = T^k(L)$ d'où $x \in \mathcal{B} \cap U$. Ainsi, $\mathcal{B} \cap U \neq \emptyset$, d'où la densité de $\mathcal{B}$ dans X^n.

$\square$

Remarque 1.43. En particulier, la caractérisation (iii) ci-dessus nous permet de remarquer que si un opérateur T se décompose en $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$ sur $X = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ est fortement k-supercyclique, alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ T_i est fortement k_i-supercyclique où $k_i = \min(\dim(E_i), k)$.

On peut alors donner une description de l'ensemble des sous-espaces de dimension n de X qui sont fortement n-supercycliques et ceci nous permet de voir que cet ensemble est un G_δ de $\mathbb{P}_n(X)$.

Proposition 1.44. *Soit $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une base d'ouverts de X. Alors*

$$\mathcal{E}S_n(T) = \bigcap_{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathbb{N}^n} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_n((T \oplus \cdots \oplus T)^{-i}(V_{j_1} \times \cdots \times V_{j_n}) \cap X_n).$$

Preuve :

Soit $L \in \mathcal{E}S_n(T)$. Grâce à la Proposition 1.42, ceci est équivalent à supposer la densité de $\cup_{i=1}^{\infty} T^i(L) \times \cdots \times T^i(L)$ dans X^n. De plus, on peut traduire cela en termes d'ouverts en utilisant la base d'ouverts $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de X et l'on obtient :

$$\forall (j_1, \cdots, j_n) \in \mathbb{N}^n, \exists i \in \mathbb{N} : \; (T^i(L) \times \cdots \times T^i(L)) \cap (V_{j_1} \times \cdots \times V_{j_n}) \neq \emptyset.$$

Puisque X_n est un ouvert dense de X^n, ceci se reformule également de la façon suivante :

$$\forall (j_1, \cdots, j_n) \in \mathbb{N}^n, \exists i \in \mathbb{N} : \; X_n \cap (L \times \cdots \times L) \cap (\oplus_{k=1}^n T)^{-i}(V_{j_1} \times \cdots \times V_{j_n}) \neq \emptyset.$$

On transfère ensuite cet ensemble dans $\mathbb{P}_n(X)$ par la projection π_n, ce qui nous assure l'appartenance de L à l'ensemble

$$\bigcap_{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathbb{N}^n} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \pi_n((T \oplus \cdots \oplus T)^{-i}(V_{j_1} \times \cdots \times V_{j_n}) \cap X_n).$$

□

Comme dans le cas des opérateurs hypercycliques ou supercycliques, c'est cette écriture de l'ensemble des espaces fortement n-supercycliques qui nous permet de donner un analogue de la notion de transitivité topologique pour les opérateurs fortement n-supercycliques qui est décrit dans la proposition suivante :

Proposition 1.45. *On a équivalence entre les assertions suivantes :*

(i) T est fortement n-supercyclique ;

(ii) $\forall U \subset \mathbb{P}_n(X), \forall V \subset X^n$ ouverts non-vides, $\exists i \in \mathbb{N}$: $(\oplus_{k=1}^n T)^i(\pi_n^{-1}(U)) \cap V \neq \emptyset$.

En particulier, si T est fortement n-supercyclique, alors $\mathcal{E}S_n(T)$ est un G_δ dense de $\mathbb{P}_n(X)$.

Preuve :

Soit $L \in \mathcal{E}S_n(T)$, comme X ne possède pas de points isolés, $\mathbb{P}_n(X)$ n'en possède pas non-plus et ainsi $\mathcal{O}(L,T) \subset \mathcal{E}S_n(T)$. Ainsi, $\mathcal{E}S_n(T)$ est soit vide soit dense et c'est un G_δ d'après la Proposition 1.44.
D'après ce qui précède, T est fortement n-supercyclique si et seulement si $\mathcal{E}S_n(T)$ est dense dans $\mathbb{P}_n(X)$, et d'après la caractérisation de $\mathcal{E}S_n(T)$, ceci revient à dire que pour tout $U \in \mathbb{P}_n(X)$ ouvert non-vide et tout $(j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}^n$, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que

$$\pi_n((T \oplus \cdots \oplus T)^{-i}(V_{j_1} \times \cdots \times V_{j_n}) \cap X_n) \cap U \neq \emptyset$$

où $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une base d'ouverts de X. En remarquant que $\pi_n^{-1}(U) \subseteq X_n$, on obtient la formulation équivalente suivante : pour tout $U \in \mathbb{P}_n(X)$ ouvert non-vide et tout $(j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}^n$, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que

$$(T \oplus \cdots \oplus T)^{-i}(V_{j_1} \times \cdots \times V_{j_n}) \cap \pi_n^{-1}(U) \neq \emptyset.$$

Ceci termine la preuve car $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ étant une base d'ouverts de X, ceci reste vrai pour tout ouvert de X^n.

□

Remarque 1.46. Comme l'application π_n est surjective continue et ouverte, il est facile de montrer que si un ouvert non-vide U est dense dans X_n alors son image par π_n est dense dans $\mathbb{P}_n(X)$. De la même façon, on montre que si V est un ouvert dense de $\mathbb{P}_n(X)$, alors $\pi_n^{-1}(V)$ est dense dans X_n. Par conséquent, si T est fortement n-supercyclique sur X, alors l'ensemble $\pi_n^{-1}(\mathcal{E}S_n(T))$ est un G_δ dense de X^n.

Grâce à ces premiers résultats, on peut maintenant donner une première classe d'exemples d'opérateurs fortement n-supercycliques.

Corollaire 1.47. *Soit T un opérateur vérifiant le critère de supercyclicité, alors T est fortement n-supercyclique pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve :

D'après le Théorème 1.16, T vérifie le critère de supercyclicité si et seulement si $(\oplus_{k=1}^{n} T)$ est supercyclique sur X^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le Théorème de Transitivité de Birkhoff pour les opérateurs supercycliques, on sait que pour tous ouverts non-vides V, W de X^n, il existe un entier i et un scalaire $\lambda \neq 0$ tels que $(\oplus_{i=1}^{n} T^i)(\lambda W) \cap V \neq \emptyset$. Nous allons vérifier la condition (ii) de la Proposition 1.45. Soient alors U un ouvert non-vide de $\mathbb{P}_n(X)$ et V un ouvert non-vide de X^n. Par définition de π_n, $\pi_n^{-1}(U)$ est un ouvert de X^n et pour tout $\lambda \neq 0$, $\lambda \pi_n^{-1}(U) = \pi_n^{-1}(U)$. Posons $W := \pi_n^{-1}(U)$, en appliquant la version supercyclique du Théorème de Transitivité de Birkhoff avec V et W, on obtient l'existence d'un entier naturel i tel que $(\oplus_{i=1}^{n} T^i)(\pi_n^{-1}(U)) \cap V \neq \emptyset$. Ainsi, la condition (ii) de la Proposition 1.45 est vérifiée et T est fortement n-supercyclique.

$\square$

Corollaire 1.48. *Soit T un opérateur de décalage pondéré sur ℓ_p et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors T est supercyclique si et seulement si T est fortement n-supercyclique.*

Preuve :

On sait que tous les décalages pondérés supercycliques vérifient le critère de supercyclicité, par conséquent le Corollaire 1.47 nous assure le caractère fortement n-supercyclique de T. Inversement, si l'on suppose que T est fortement n-supercyclique, alors T est automatiquement n-supercyclique. Or le Théorème 1.22 nous assure que pour un décalage pondéré la n-supercyclicité est équivalente à la supercyclicité. Ainsi, T est supercyclique.

$\square$

On peut encore déduire un troisième corollaire permettant de construire des opérateurs fortement n-supercycliques :

Corollaire 1.49. *Soient $1 \leq n < \infty$, $X_1, \ldots, X_n$ des espaces de Banach et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $T_i \in \mathcal{L}(X_i)$. On suppose que les T_i vérifient le critère d'hypercyclicité pour la même suite $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, alors $(\oplus_{i=1}^{n} T_i)$ est fortement n-supercyclique sur $X = \oplus_{i=1}^{n} X_i$.*

Preuve :

En effet, il est bien connu qu'une somme directe d'opérateurs vérifiant le critère d'hypercyclicité pour la même suite est aussi hypercyclique. Après cette remarque, il suffit d'utiliser le Corollaire 1.47 pour conclure.

$\square$

Remarque 1.50. On pourrait être tenté de remplacer la condition de vérifier le critère d'hypercyclicité pour une même suite dans le corollaire précédent par celle de vérifier le critère de supercyclicité comme l'a fait Nathan Feldman dans [19] pour les opérateurs n-supercycliques, or nous verrons un peu plus loin dans le Théorème 3.4 que l'on ne peut pas faire cela car le spectre d'un opérateur fortement n-supercyclique est composé au plus d'un ensemble fini de points et d'un ensemble dont toutes les composantes connexes intersectent un même cercle !

Remarque 1.51. Comme dans le cas des opérateurs hypercycliques, on peut grâce à cet analogue du Théorème de Transitivité de Birkhoff déduire un critère de forte n-supercyclicité. Malheureusement, ce critère n'est pas aussi utile qu'on pourrait le penser dans le sens où si l'on y regarde de plus près, il est équivalent au critère d'hypercyclicité.

1.8 Théorème d'Ansari fortement n-supercyclique

Dans l'article [48], Shkarin unifie les preuves de trois résultats importants en dynamique linéaires qui sont le Théorème 1.11 d'Ansari, le Théorème 1.10 de Léon-Müller et le Théorème de Conejero-Müller-Peris. Son article commence par un Théorème très général qui assure l'universalité de $T \oplus M_g$ sur $X \oplus G$ où T est un opérateur universel ayant de bonnes propriétés sur X et g est un générateur d'un groupe topologique compact. On connaissait déjà un lien fort entre ces résultats car chacun reposait sur un argument de connexité de l'ensemble des éléments hypercycliques des opérateurs, cependant Shkarin a permis d'unifier la façon d'aborder ces résultats en les regroupant comme étant issus d'un même théorème général. Voici le théorème général que Shkarin a donné dans [48] :

Théorème 1.52. *Soient X un espace topologique, $T : X \to X$ une application continue et g un générateur d'un groupe topologique compact G. Supposons également qu'il existe un sous-ensemble non-vide Y de $\mathcal{U}(T)$ invariant par T, connexe par arcs, localement connexe par arcs et simplement connexe. Alors l'ensemble $\{(T^n(x), g^n),\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $X \times G$ pour tout $x \in Y$.*

A partir de ce théorème, de nombreux corollaires sont démontrés puis exploités, nous nous contenterons de reprendre la proposition suivante dont la démonstration est faite dans [48] et repose sur le théorème précédent.

Proposition 1.53. *Soient X un espace topologique sans points isolés, $n \in \mathbb{N}^*$ et $T : X \to X$ une application continue tels que l'ensemble des vecteurs universels pour T noté $\mathcal{U}(T)$ est connexe. Alors $\mathcal{U}(T^n) = \mathcal{U}(T)$.*

Avec cette Proposition nous pouvons à présent prouver le Théorème d'Ansari pour les opérateurs fortement n-supercycliques. Il faut cependant remarquer que Shkarin énonce ce théorème sans démonstration dans son article [48]. On se propose donc de présenter une démonstration de ce théorème qui repose sur la Proposition 1.53 ci-dessus. Cependant, une telle démonstration requiert aussi certains résultats sur les opérateurs fortement n-supercycliques que nous avons développé dans cette thèse.

Proposition 1.54. *T est fortement k-supercyclique si et seulement si T^n est fortement k-supercyclique.*

Preuve :

En dimension finie, il n'existe pas d'opérateurs fortement k-supercycliques sauf sur des espaces de dimension 1 et 2 pour le cas réel et de dimension 1 pour le cas complexe comme nous l'avons montré dans le Théorème 2.34. De plus, dans ces cas c'est une condition équivalente à la supercyclicité. Le cas de la dimension finie est donc trivial.
On peut donc supposer que X est un espace de dimension infinie. Soit $\{x_1, \dots, x_k\}$ une base du sous-espace fortement k-supercyclique L. Posons

$$X_0 = \{p(T)(x_1, \dots, x_k) := (p(T)(x_1), \dots, p(T)(x_k)), p \in \mathcal{P}\} \subset X^k.$$

Il est clair par définition que X_0 est de dimension infinie dans X^k car sinon l'orbite de L par T engendre un sous-espace de dimension finie de X. De plus, $(T \oplus \cdots \oplus T)_{|X_0}$ est injectif. En effet, pour tous $p, q \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}
&T(p(T)(x_1, \ldots, x_k)) = T(q(T)(x_1, \ldots, x_k)) \\
&\Leftrightarrow (X(p-q))(T)(x_1, \ldots, x_k) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} X(p-q) = 0 \Leftrightarrow p = q \\ \forall 1 \leq j \leq k,\ \exists k_j \in \mathbb{N} \text{ et } (\alpha_i^j)_{i=0}^{k-1} / :\ T^{k_j}(x_j) = \sum_{i=0}^{k_j-1} \alpha_i^j T^i(x_j) \end{cases}
\end{aligned}$$

Or dans ce dernier cas, $\{(\oplus T^n)(x_1, \ldots, x_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est contenu dans un espace vectoriel de dimension au plus $\prod_{j=1}^{k} k_j < +\infty$. Ce qui est absurde car ceci contredit la densité de l'orbite de L. Ainsi, $p = q$ et $(T \oplus \cdots \oplus T)$ est injectif sur X_0.

Grâce au Théorème 3.1, nous savons en outre que T^* possède au plus k valeurs propres distinctes. Considérons alors l'ensemble

$$Z = \{p(T)(x_1, \ldots, x_k), p \in \mathcal{P},\ 0 \notin p(\sigma_p(T^*))\}.$$

On remarque que Z est composé de k-uplets de bases d'espaces vectoriels fortement k-supercycliques pour T. En effet, si $0 \notin p(\sigma_p(T^*))$, alors $p(T)$ est d'image dense. Ainsi, l'ensemble $p(T)\left(\{\oplus T^i(L)\}_{i\in\mathbb{N}}\right) = \{\oplus T^i(p(T)(L))\}_{i\in\mathbb{N}}$ est dense et $p(T)(L)$ est un sous-espace fortement k-supercyclique pour T. Donc,

$$Y = \{\mathrm{Vect}(p(T)(x_1, \ldots, x_k)), p \in \mathcal{P},\ 0 \notin p(\sigma_p(T^*)))\}$$

est composé d'espaces fortement k-supercycliques pour l'application $\widetilde{T} : \pi_k(X_0) \to \pi_k(X_0)$ qui est l'application associée à T sur $\pi_k(X_0)$.

Or Z est connexe par arc, donc connexe et comme π_k est continue, Y est connexe. De plus, Y est dense dans $\mathbb{P}_k(X)$ par forte k-supercyclicité de T. Ainsi, $\mathcal{U}(\widetilde{T})$ est connexe. Enfin la Proposition 1.53 implique que $L \in \mathcal{U}(\widetilde{T}^n)$. Or comme $\mathbb{P}_n(X_0)$ est dense dans $\mathbb{P}_n(X)$, on déduit que L est fortement k-supercyclique pour T^n.

□

2 n-supercyclicité et forte n-supercyclicité en dimension finie

2.1 Introduction

Nous avons vu que Feldman et Shkarin ont introduit deux notions généralisant la supercyclicité. Ces notions ont pour point commun d'étudier des orbites de sous-espaces vectoriels de dimension supérieure ou égale à 1. On commence à mieux comprendre les opérateurs n-supercycliques principalement grâce aux travaux de Feldman [19],[13] et de Bayart et Matheron [5] et l'on s'aperçoit qu'un certain nombre de propriétés des opérateurs supercycliques se généralisent plutôt bien à cette nouvelle classe. Cependant, il reste encore des questions très naturelles non-résolues comme celle de la caractérisation de la n-supercyclicité en dimension finie. En effet, on sait depuis le milieu des années 1970 grâce aux travaux de Hilden et Wallen [32] qu'il n'existe pas d'opérateurs supercycliques sur $\mathbb{C}^n$ avec $n > 1$ et depuis le début des années 90 qu'il n'existe pas d'opérateur supercycliques sur $\mathbb{R}^n$ pour $n > 2$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ grâce aux travaux de Herzog [31]. De plus, les opérateurs supercycliques sur $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont complètement caractérisés. Par contre, dans le cas des opérateurs n-supercycliques, Bourdon Feldman et Shapiro ont seulement donné une réponse partielle en 2004. Cette réponse est contenue dans le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Soit $n \geq 2$. Il n'existe pas d'opérateur $(n-1)$-supercyclique sur $\mathbb{C}^n$. En particulier, il n'existe pas d'opérateur k-supercyclique sur $\mathbb{C}^n$ pour tout $1 \leq k \leq n-1$.*

La preuve de ce théorème n'est pas facile. En effet, celle-ci utilise des calculs poussés réalisables en utilisant de façon prépondérante la réduction de Jordan. Ceci permet de clore le problème dans le cas complexe, cependant on ne sait toujours pas ce qu'il se passe dans le cas réel, mais les choses semblent être différentes du cas complexe. En effet, sur $\mathbb{R}^2$ toute rotation d'angle libre avec π sur $\mathbb{Q}$ est supercyclique. En poussant un peu plus loin le raisonnement, on remarque que toute rotation autour d'une droite de $\mathbb{R}^3$ d'angle libre avec π sur $\mathbb{Q}$ est 2-supercyclique. Cet exemple prouve bien que les choses se présentent différemment, cependant nous ne savons pas à jusqu'à quel point.

Quant à la notion de forte n-supercyclicité introduite par Shkarin [48], on ne connait à priori pas grand chose de ces opérateurs à part leur définition et le fait qu'ils satisfont la propriété d'Ansari ! Par contre, comme les opérateurs fortement n-supercycliques sont une sous-classe des opérateurs n-supercycliques, le théorème précédent de Bourdon, Feldman et Shapiro s'applique également aux opérateurs fortement n-supercycliques. Il est donc vain de chercher des opérateurs fortement n-supercyclique sur un espace vectoriel complexe de dimension finie.

Le but de ce chapitre est de prolonger ces deux études au cas réel et en particulier, nous montrerons les deux résultats suivants :

Théorème 2.2. *Soit $n \geq 2$. Il n'existe pas d'opérateur $(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1)$-supercyclique sur $\mathbb{R}^n$. De plus, cette valeur est optimale : il existe toujours un opérateur $(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor)$-supercyclique sur $\mathbb{R}^n$.*

Ce théorème clôt la question de l'existence d'opérateurs n-supercycliques en dimension finie en caractérisant les dimensions des espaces pour lesquels il existe un opérateur n-supercyclique. Le théorème suivant montre que les choses sont différentes pour les opérateurs fortement n-supercycliques.

Théorème 2.3. *Pour $n \geq 3$, il n'existe pas d'opérateurs fortement k-supercycliques sur $\mathbb{R}^n$ pour $1 \leq k < n$.*

2.2 Préliminaires

Réduction de Jordan

Dans la suite, nous allons avoir besoin d'utiliser des opérateurs de “la meilleure forme possible”. Quand on travaille sur le corps des nombres complexes, une réduction de matrice bien connue est la réduction de Jordan. Cette réduction s'avère bien utile pour résoudre bon nombre de questions, on peut citer par exemple [13] où les auteurs utilisent cette réduction pour montrer qu'il n'existe pas d'opérateur $(n-1)$-supercyclique sur $\mathbb{C}^n$. Partant d'une matrice quelconque, la réduction de Jordan permet de construire une matrice triangulaire supérieure semblable à celle de départ. De fait, cette matrice est plus simple à étudier grâce à sa forme particulière. En fait, la réduction de Jordan est encore plus précise, le résultat est une somme directe de blocs de Jordan.
Comme tout se chapitre a pour but de s'intéresser à la n-supercyclicité et à la forte n-supercyclicité, nous utiliserons le terme bloc de Jordan pour signifier un bloc de Jordan non-nul. En effet, tout opérateur dont la décomposition de Jordan contient un bloc de Jordan nul ne peut pas être surjectif et n'est donc pas n-supercyclique.

Rappelons qu'un bloc de Jordan de valeur propre $\lambda \neq 0$ et de taille k est usuellement une matrice $k \times k$ avec uniquement des λ sur la diagonale, des 1 sur la première surdiagonale et des zéros partout ailleurs. Il est bon de remarquer qu'une somme directe de blocs de Jordan de taille 1 est une matrice diagonale. Dans ce qui va suivre, nous allons suivre une autre convention qui simplifie légèrement les notations mais qui ne change rien à l'efficacité de la réduction de Jordan, nous conviendrons donc qu'un bloc de Jordan classique de valeur propre λ et de taille k est une matrice $k \times k$ avec uniquement des λ sur la diagonale et sur la première surdiagonale, et des zéros ailleurs.

Cette réduction est bien connue pour les matrices complexes mais le cas complexe ayant déjà été traité par Bourdon,Feldman et Shapiro [13], nous voulons travailler sur des matrices à coefficients réels et le fait qu'il puisse exister des valeurs propres complexes pour une matrice réelle nous interdit d'appliquer cette réduction. Cependant, il existe tout de même une version moins connue de la réduction de Jordan qui s'applique aux matrices réelles et c'est celle-ci que nous allons utiliser. Dans le cas réel, nous pouvons décomposer toute matrice en une somme directe de blocs de Jordan classiques et de blocs de Jordan réels. Un bloc de Jordan réel de taille k et de module $\lambda \neq 0$ est usuellement une matrice $2k \times 2k$ avec uniquement λR_θ sur la diagonale, des matrices identité sur la première surdiagonale et des zéros partout ailleurs. Pour les mêmes raisons que dans le cas complexe, nous suivront une convention différente pour laquelle les termes de la diagonale sont les mêmes que ceux de la première surdiagonale c'est-à-dire λR_θ. Soit alors $\mathcal{B}$ un bloc de Jordan classique (respectivement réel) de taille k avec $A = \lambda$ (respectivement $A = \lambda R_\theta$) alors les puissances de $\mathcal{B}$ sont facilement exprimables. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{B}^n = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^n & \binom{n}{1}\mathcal{A}^n & \binom{n}{2}\mathcal{A}^n & \cdots & \binom{n}{k-1}\mathcal{A}^n \\ 0 & \mathcal{A}^n & \binom{n}{1}\mathcal{A}^n & \binom{n}{2}\mathcal{A}^n \cdots & \binom{n}{k-2}\mathcal{A}^n \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{n}{1}\mathcal{A}^n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \mathcal{A}^n \end{pmatrix}.$$

Cette simplicité à exprimer les puissances d'une matrice est un des avantages de la réduction de Jordan qui nous intéresse le plus ici puisque nous serons amenés à travailler sur des itérés de matrices dans la suite et nous aurons besoin d'avoir une expression de ces itérés la plus simple possible pour étudier leur comportement asymptotique. Pour de plus amples détails sur la décomposition de Jordan, on pourra se référer à [42] ou [33].
En résumé, tout opérateur T sur $\mathbb{R}^n$ n'ayant pas 0 pour valeur propre est donc semblable à un opérateur R de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{J_p} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{\mathcal{J}_1} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\mathcal{J}_q} \end{pmatrix}$$

où les blocs de Jordan classiques J_i sont de la forme habituelle

$$J_i = \begin{pmatrix} \mu_i & \mu_i & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \cdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \mu_i \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_i \end{pmatrix}$$

et les blocs de Jordan réels $\mathcal{J}_i$ sont de la forme suivante

$$\mathcal{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i R_{\theta_i} & \lambda_i R_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \cdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \lambda_i R_{\theta_i} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i R_{\theta_i} \end{pmatrix}.$$

2.3 Étude de la n-supercyclicité sur $\mathbb{R}^N$

2.3.1 Introduction

Bourdon, Feldman et Shapiro ont prouvé qu'il existe des opérateurs n-supercycliques sur $\mathbb{C}^N$ si et seulement si $n = N$. Ceci caractérise complètement la n-supercyclicité dans le cas complexe en dimension finie. Dans cette partie, nous allons étudier le pendant réel de ce théorème ; plus précisément nous allons utiliser la décomposition de Jordan réelle pour déterminer pour quels entiers $n \in \mathbb{N}^*$ est-ce qu'il existe des opérateurs n-supercycliques sur $\mathbb{R}^N$. Rappelons tout d'abord que sur $\mathbb{R}^2$, il est facile de trouver un opérateur supercyclique, il suffit de considérer une rotation d'angle irrationnel. De plus, tout vecteur non-nul de $\mathbb{R}^2$ est supercyclique pour cet opérateur. De la même façon, on peut remarquer qu'il existe un opérateur 2-supercyclique dans $\mathbb{R}^3$, il suffit de considérer une rotation d'angle irrationnel et d'axe la droite $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ et ses espaces 2-supercycliques sont tous les plans contenant cette droite.

Ces exemples sont faciles à comprendre et à vérifier. Si l'on souhaite continuer dans cette voie et voir ce qu'il peut se passer pour des dimensions supérieures, il est assez naturel de penser à ajouter d'autres matrices de rotations et à utiliser le Théorème de densité de Kronecker [30] pour "disjoindre" les comportements individuels de chaque sous-matrice de rotation. Bien sûr, nous allons séparer le cas de la dimension paire de celui où la dimension est impaire puisque dans ce dernier cas nous devrons empiler des matrices de taille 2 puis combler la dernière ligne comme en dimension 3. De cette façon, nous allons construire sur $\mathbb{R}^N$ un exemple d'opérateur $(\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor)$-supercyclique.

Exemple 2.4. Pour tout $N \geq 1$:

• Sur $\mathbb{R}^{2N}$, les endomorphismes de matrice représentative

$$\begin{pmatrix} R_{\theta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & R_{\theta_N} \end{pmatrix}$$

sont N-supercycliques si (et seulement si) $\theta_1, \ldots, \theta_N, \pi$ sont libres sur $\mathbb{Q}$.

• Sur $\mathbb{R}^{2N+1}$, les endomorphismes de matrice

$$\begin{pmatrix} R_{\theta_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & R_{\theta_N} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont $(N+1)$-supercycliques si (et seulement si) $\theta_1, \ldots, \theta_N, \pi$ sont libres sur $\mathbb{Q}$.

Cet exemple prouve l'optimalité du Théorème 2.2. On souhaite maintenant prouver l'autre partie du théorème. Nous allons prouver le Théorème 2.2 en plusieurs étapes en cherchant à déterminer le meilleur indice de supercyclicité de différents cas particuliers, que nous regrouperons au fur et à mesure, pour enfin terminer par un théorème général dont le Théorème 2.2 sera un corollaire direct. Nous commencerons par déterminer l'indice de supercyclicité pour deux cas particuliers de matrices : tout d'abord le cas d'un bloc de Jordan réel de taille 2 puis celui d'une somme directe de matrices de rotation. Nous commencerons par ces deux exemples car la preuve de ces résultats peut se faire sans outils supplémentaires mais permet aussi de prendre conscience que nous aurons besoin de quelque chose en plus si l'on souhaite continuer avec des matrices plus élaborées. Nous donnerons alors les outils nécessaires pour aller plus loin. Un de ces outils est une façon de présenter la base du sous-espace n-supercyclique de façon à ce qu'elle soit réduite et adaptée à l'opérateur que l'on considère. Ensuite, notre but sera de donner les meilleurs indices de supercyclicité pour différents types de matrices. Nous commencerons par les matrices primaires qui sont des sommes directes de blocs de Jordan (classiques et réels) unimodulaires de taille 1. Nous poursuivrons avec le cas d'un bloc de Jordan réel de taille quelconque pour lequel nous donnerons un minorant de l'indice de supercyclicité. Puis nous nous intéresserons aux matrices qui s'écrivent comme somme directe de plusieurs blocs de Jordan, d'abord quand les modules de chaque blocs sont différents puis quand le module est le même pour tous les blocs. Enfin, nous regrouperons ces résultats pour donner un minorant de l'indice de supercyclicité d'une matrice quelconque.

Nous allons commencer par considérer un bloc de Jordan réel de taille 2 et de module 1 et ceci pour deux raisons. Tout d'abord les blocs diagonaux et de Jordan classiques sont effectivement plus simples à traiter mais ceci a déjà été fait par Bourdon, Feldman et Shapiro [13] et donc celui-ci est le plus simple des opérateurs qu'il reste à considérer. D'autre part, cet exemple sera notre point de départ pour traiter le cas des blocs de Jordan réels de taille quelconque.

Proposition 2.5. $T = \begin{pmatrix} R_\theta & R_\theta \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$ *n'est pas 2-supercyclique sur* $\mathbb{R}^4$.

Preuve :
Supposons par l'absurde que T est 2-supercyclique. Soit $M = \mathrm{Vect}(x, y)$ un sous-espace 2-supercyclique pour T. Alors en prenant des combinaisons linéaires des vecteurs de bases, on peut supposer que $x = (x_1, x_2, 0, 1)$ et $y = (y_1, y_2, 1, 0)$ ou bien $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $y = (y_1, y_2, 0, 0)$ avec $\|(x_3, x_4)\| = 1$.

Commençons par considérer le cas où $x = (x_1, x_2, 0, 1)$ et $y = (y_1, y_2, 1, 0)$, alors pour tous ouverts non-vides U et V de $\mathbb{R}^2$, il existe $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante, et $(\lambda_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}, (\mu_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\begin{cases} R_\theta^{n_i}\left(\lambda_{n_i}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mu_{n_i}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) + n_i R_\theta^{n_i}\begin{pmatrix} \mu_{n_i} \\ \lambda_{n_i} \end{pmatrix} \in U \\ R_\theta^{n_i}\begin{pmatrix} \mu_{n_i} \\ \lambda_{n_i} \end{pmatrix} \in V \end{cases}$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} \lambda_{n_i}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mu_{n_i}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + n_i\begin{pmatrix} \mu_{n_i} \\ \lambda_{n_i} \end{pmatrix} \in R_\theta^{-n_i}(U) & (2.1) \\ \begin{pmatrix} \mu_{n_i} \\ \lambda_{n_i} \end{pmatrix} \in R_\theta^{-n_i}(V) & (2.2) \end{cases}$$

Soient $V = B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon\right)$ la boule ouverte de centre $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon ε avec $0 < \varepsilon < 1$ et U un ouvert borné non-vide. Alors, le terme (2.2) du système nous apprend que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq |\lambda_{n_i}|, |\mu_{n_i}| < 1 + \varepsilon$. Puis, en divisant le terme (2.1) par n_i, on obtient :

$$\frac{\lambda_{n_i}}{n_i}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{\mu_{n_i}}{n_i}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_{n_i} \\ \lambda_{n_i} \end{pmatrix} \in \frac{R_\theta^{-n_i}(U)}{n_i}$$

Or on a vu que les suites $(\lambda_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ et $(\mu_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ sont bornées, ainsi $\frac{\lambda_{n_i}}{n_i} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{\mu_{n_i}}{n_i} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus comme U est borné, la relation précédente impose aux suites $(\lambda_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ et $(\mu_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de tendre elles-mêmes vers 0. Ceci contredit $\begin{pmatrix} \mu_{n_i} \\ \lambda_{n_i} \end{pmatrix} \in R_\theta^{-n_i}(V)$.

Considérons donc maintenant le cas où $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $y = (y_1, y_2, 0, 0)$ alors pour tous ouverts non-vides U et V de $\mathbb{R}^2$, il existe $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante, et $(\lambda_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}, (\mu_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\begin{cases} R_\theta^{n_i}\left(\lambda_{n_i}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mu_{n_i}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) + n_i\lambda_{n_i}R_\theta^{n_i}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in U \\ \lambda_{n_i}R_\theta^{n_i}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V \end{cases}$$

qui s'exprime aussi

$$\begin{cases} \lambda_{n_i}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mu_{n_i}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + n_i\lambda_{n_i}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in R_\theta^{-n_i}(U) & (2.3) \\ \lambda_{n_i}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in R_\theta^{-n_i}(V) & (2.4) \end{cases}$$

Prenons $V = B\left(\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon\right)$ avec $0 < \varepsilon < 1$, $r > 1$ et U un ouvert borné non-vide. Le terme (2.4) implique que $r - \varepsilon < |\lambda_{n_i}| < r + \varepsilon$ et en divisant le terme (2.3) par $n_i\lambda_{n_i}$, on obtient :

$$\frac{1}{n_i}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{\mu_{n_i}}{n_i\lambda_{n_i}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc,

$$\frac{\mu_{n_i}}{n_i\lambda_{n_i}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi la suite $\left(\frac{\mu_{n_i}}{n_i\lambda_{n_i}}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée. De plus, comme $(y_1, y_2) \neq (0, 0)$, il est même clair que la suite $\left(\frac{\mu_{n_i}}{n_i\lambda_{n_i}}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel $t \in \mathbb{R}$. On obtient alors :

$$t\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

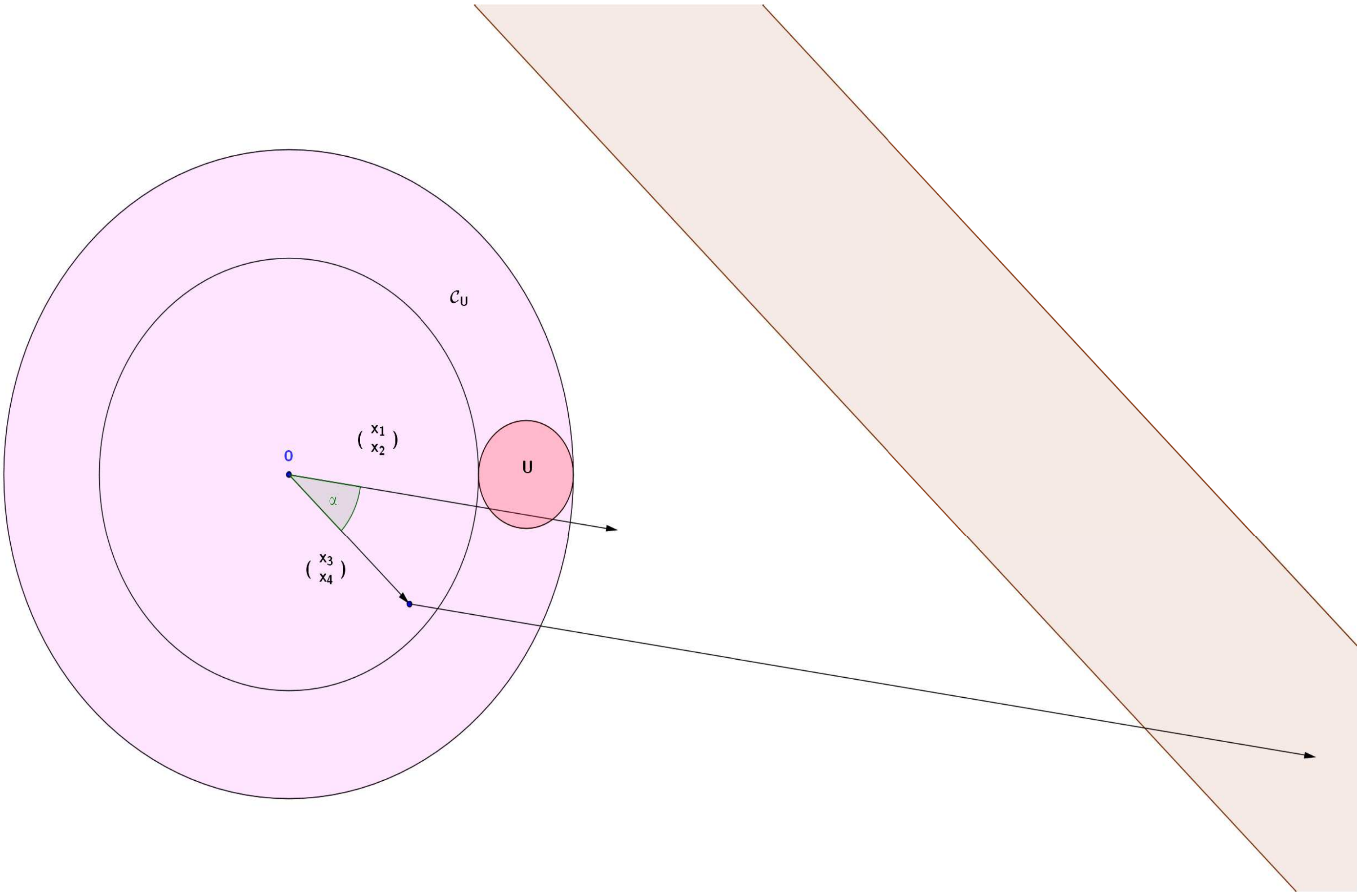
Comme (x_3, x_4) n'est pas nul, l'égalité ci-dessus implique (y_1, y_2) est également non-nul et l'on en déduit que la famille $\left\{\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right\}$ est liée. Quitte à manipuler notre base de départ, on peut donc supposer que $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $y = (x_3, x_4, 0, 0)$, et on ré-exprime (2.3) et (2.4) :

$$\begin{cases} \lambda_{n_i}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (\mu_{n_i} + n_i\lambda_{n_i})\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in R_\theta^{-n_i}(U) & (2.5) \\ \lambda_{n_i}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in R_\theta^{-n_i}(V) & (2.6) \end{cases}$$

Il est clair maintenant que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants. En effet, s'ils ne l'étaient pas, on pourrait encore manipuler notre base et obtenir $x = (0, 0, x_3, x_4)$ et $y = (x_3, x_4, 0, 0)$ et

$$\begin{cases} (\mu_{n_i} + n_i \lambda_{n_i}) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in {R_\theta}^{n_i}(U) \\ \lambda_{n_i} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in {R_\theta}^{n_i}(V) \end{cases}$$

Il suffirait alors de prendre U et V deux ouverts tels que $sU \cap V = \emptyset$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ pour obtenir une contradiction !
Comme les vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants, notons donc α l'angle formé par ces vecteurs, alors $\sin(\alpha) > 0$. Soit $0 < a < \sin(\alpha)(r \quad \varepsilon) \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|$ et choisissons $U = B\left(\begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{a}{4} \right)$ et notons $\mathcal{C}_U$ la couronne engendrée par les rotations de U. Par un petit calcul élémentaire, il est facile de voir que $\left(\mathbb{R} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + [r \quad \varepsilon, r + \varepsilon] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)$ n'intersecte pas la couronne $\mathcal{C}_U$. Ceci contredit (2.5) !



Donc $\begin{pmatrix} R_\theta & R_\theta \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$ n'est pas 2-supercyclique.

$\square$

Remarque 2.6. On vient de voir dans la proposition précédente que $\begin{pmatrix} R_\theta & R_\theta \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$ n'est pas 2-supercyclique, cependant il est facile de remarquer que cette matrice est 3-supercyclique si π et θ sont linéairement indépendant sur $\mathbb{Q}$.

Remarque 2.7. Un des points intéressants de ce cas particulier est que sa preuve est divisée en deux parties selon la forme de la base du sous-espace 2-supercyclique considéré. En outre il semble difficile de reproduire cette preuve sans tenir compte de la forme de la base que l'on considère. Nous verrons tout au long de notre étude que cette question de forme de la base est une question majeure.

2.3.2 Un exemple éclairant

Avant de développer des outils pour démontrer le résultat général annoncé, nous allons nous attarder sur l'exemple d'une somme directe de multiples de rotations. Le résultat suivant montre que l'on ne peut pas améliorer l'indice de supercyclicité des matrices de l'Exemple 2.4. Une des motivations pour traiter cet exemple est de montrer les mécanismes qui interviennent dans cette preuve et l'importance d'adapter les bases des espaces sur lesquels nous travaillons à la forme de T. De plus, l'opérateur que l'on considère dans l'exemple suivant est une somme directe de rotations et chacune agit sur $\mathbb{R}^2$, ainsi là où habituellement on parle de composantes d'un vecteur, nous parlerons plutôt de bicomposantes d'un vecteur au sens où nous regarderons chaque vecteur comme une somme directe de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et non de $\mathbb{R}$ comme à l'accoutumée. Dans ce qui suit, la k-ième bicomposante du vecteur$(x_1, \ldots, x_{2N})$ est le vecteur sur lequel agit la k-ième sous-matrice de rotation, c'est-à-dire le vecteur (x_{2k-1}, x_{2k}). Soulignons également que la proposition suivante n'a d'intérêt que pour la compréhension du mécanisme général sous-jacent aux preuves qui vont suivre. En effet, nous montrerons plus tard un résultat plus général que celui-ci et dont la preuve est totalement indépendante du résultat ci-dessous.

Proposition 2.8. *Soit $N \geq 2$, alors* $R_N := \begin{pmatrix} a_1 R_{\theta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_N R_{\theta_N} \end{pmatrix}$ *n'est pas $(N-1)$-supercyclique sur $\mathbb{R}^{2N}$ pour tous $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ et tous $\theta_1, \ldots, \theta_N \in \mathbb{R}$.*

Preuve :
Tout d'abord, quitte à réordonner les matrices de rotations et à multiplier par un réel non-nul, on peut supposer $0 < |a_1| \leq \ldots \leq |a_{N-1}| \leq a_N = 1$. En effet, si un des a_i est nul alors il est clair que R_N n'est pas à image dense et n'est donc pas $(N-1)$-supercyclique.

Nous allons montrer par récurrence que R_N n'est pas $(N-1)$-supercyclique sur $\mathbb{R}^{2N}$. Pour $N = 2$, le résultat est donné par Herzog [31].

Supposons que pour tout $2 \leq k < N$, tous $\theta_1, \ldots, \theta_k$ et tous $0 < |a_1| \leq \ldots \leq |a_{k-1}| \leq a_k = 1$ aucune matrice de la forme R_k n'est $(k-1)$-supercyclique et montrons que R_N n'est pas $(N-1)$-supercyclique.

Par l'absurde, supposons que R_N est $(N-1)$-supercyclique et soit $M = \mathrm{Vect}(x^1, \cdots, x^{N-1})$ un sous-espace $(N-1)$-supercyclique pour R_N et posons $x^i_{N+1} := x^i$ pour tout $1 \leq i \leq N-1$.

On affirme que pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$, M est engendré par des vecteurs $x^1_k, \ldots, x^{N-1}_k$ tels que si l'on définit $p_{N+1} := 0$ et

$$p_k := \sup\big(j \in \{1, \ldots, N-1\} : \text{ la } k\text{-ième bicomposante de } x^j_k \text{ est non-nulle }\big)$$

alors :

(a) si $p_{k+1} \neq N-1$ alors $p_k \in \{p_{k+1}+1, p_{k+1}+2\}$ si $k \neq N$, $x^j_k \neq x^j_{k+1}$ pour tout $1 \leq j \leq p_{k+1}$,

(b) si $p_k = p_{k+1}+2$, alors $x^{p_k-1}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $x^{p_k}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(c) pour tout $k \leq l \leq N$ et tout $p_l < j \leq N-1$, la l-ième bicomposante du vecteur x^j_k est nulle.

On va montrer ceci par récurrence décroissante sur $k \in \{1, \ldots, N\}$. Nous commençons par le cas où $k = N$.

Quitte à considérer des combinaisons linéaires des vecteurs $x^1_{N+1}, \ldots, x^{N-1}_{N+1}$ et à les réordonner, on peut supposer que l'on a une base $x^1_N, \ldots, x^{N-1}_N$ de M pour laquelle soit la dernière bicomposante de x^1_N est non-nulle (c'est-à-dire $p_N = 1$), soit la dernière bicomposante de x^1_N et x^2_N est non-nulle (c'est-à-dire $p_N = 2$) mais pour laquelle la dernière bicomposante est nulle pour tous les autres vecteurs de base. De plus, dans cette dernière éventualité, on peut également exiger que les dernières bicomposantes de x^1_N et x^2_N soient $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme dans la preuve de la Proposition 2.5. Il est facile de voir que nous avons vérifié l'hypothèse de récurrence pour $k = N$.

Supposons maintenant que l'hypothèse de récurrence est vérifiée pour $N, \ldots, k+1$, et vérifions la au rang k. On commence par définir $x^j_k := x^j_{k+1}$ pour tout $1 \leq j \leq p_{k+1}$. Quitte à prendre des combinaisons linéaires des vecteurs $x^{p_{k+1}+1}_{k+1}, \ldots, x^{N-1}_{k+1}$ et quitte à les réordonner, on peut obtenir $N-1-p_{k+1}$ vecteurs $x^{p_{k+1}+1}_k, \ldots, x^{N-1}_k$ tels que $\mathrm{Vect}(x^1_k, \ldots, x^{N-1}_k) = M$. D'autre part, ces vecteurs peuvent être choisis de façon à satisfaire une des conditions suivantes :

▷ Soit la k-ième bicomposante des vecteurs $x^{p_{k+1}+1}_k, \ldots, x^{N-1}_k$ est nulle, c'est-à-dire $p_k = p_{k+1}$. Cependant ce cas de figure engendre une contradiction. En effet, comme R_N est $(N-1)$-supercyclique, il existe une suite strictement croissante $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $N-1$ suites de nombres réels $(\lambda_1^{(n_i)})_{i\in\mathbb{N}},\ldots,(\lambda_{N-1}^{(n_i)})_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{pmatrix} a_1^{n_i}R_{\theta_1}^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{N-1}\lambda_j^{(n_i)}\begin{pmatrix} x_k^j(1)\\ x_k^j(2)\end{pmatrix}\right)\\ \vdots \\ a_k^{n_i}R_{\theta_k}^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{p_k}\lambda_j^{(n_i)}\begin{pmatrix} x_k^j(2k-1)\\ x_k^j(2k)\end{pmatrix}\right)\\ \vdots \\ a_N^{n_i}R_{\theta_N}^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{p_N}\lambda_j^{(n_i)}\begin{pmatrix} x_k^j(2N-1)\\ x_k^j(2N)\end{pmatrix}\right)\end{pmatrix} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ \vdots \\ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ \vdots \\ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix} \tag{2.7}$$

La dernière bicomposante ci-dessus impose que $a_N^{n_i}\lambda_j^{(n_i)} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $1\leq j\leq p_N$ car R_N est une isométrie et $1\leq p_N\leq 2$. De plus, si $p_N=2$ alors

$$\sum_{j=1}^{p_N}\lambda_j^{(n_i)}\begin{pmatrix} x_k^j(2N-1)\\ x_k^j(2N)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_2^{(n_i)}\\ \lambda_1^{(n_i)}\end{pmatrix}$$

par hypothèse de récurrence. De la même façon, on prouve de proche en proche que pour tout $1\leq j\leq p_{k+1}$, $a_{k+1}\lambda_j^{(n_i)} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $|a_{k+1}|\leq\ldots\leq|a_N|$. De plus, si $p_j=N-1$ pour un certain $j\in\{k+1,\ldots,N\}$ alors, on peut conclure directement que pour tout $1\leq j\leq N-1$, $a_k^{n_i}\lambda_j^{(n_i)} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui contredit (2.7). Sinon, comme $p_k=p_{k+1}$ et $|a_k|\leq|a_{k+1}|$, alors pour tout $1\leq j\leq p_k$, $a_k^{n_i}\lambda_j^{(n_i)} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, or ceci contredit aussi (2.7).

▷ Soit la k-ième bicomposante des vecteurs $x_k^{p_{k+1}+2},\ldots,x_k^{N-1}$ est nulle mais pas celle du vecteur $x_k^{p_{k+1}+1}$. Dans ce cas, $p_k=p_{k+1}+1$ et la k-ième bicomposante des vecteurs $x_k^{p_k+1},\ldots,x_k^{N-1}$ est nulle par construction. De plus, pour tout $k+1\leq l\leq N$ la l-ième bicomposante des vecteurs $x_k^{p_l+1},\ldots,x_k^{N-1}$ est nulle car $p_k>p_{k+1}>\ldots>p_N$ et la famille de vecteurs $\{x_k^{p_{k+1}+1},\ldots,x_k^{N-1}\}$ est construite à partir des vecteurs $x_{k+1}^{p_{k+1}+2},\ldots,x_{k+1}^{N-1}$ dont la l-ième bicomposante est nulle d'après l'hypothèse de récurrence.

▷ Soit la k-ième bicomposante des vecteurs $x_k^{p_{k+1}+3},\ldots,x_k^{N-1}$ est nulle mais pas celle des vecteurs $x_k^{p_{k+1}+1}$ et $x_k^{p_{k+1}+2}$, de plus ces deux bicomposantes peuvent être choisies pour être $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Dans ce cas, $p_k=p_{k+1}+2$ et l'on conclut comme au point précédent.

Ceci termine la récurrence.

Notons $y^1,\ldots,y^{N-1}$ les vecteurs $x_1^1,\ldots,x_1^{N-1}$ obtenus par récurrence. On a montré que la suite $(p_{N+1-k})_{0\leq k\leq N}$ est strictement croissante jusqu'à ce qu'elle atteigne la valeur $N-1$ à partir de laquelle elle reste constante. De plus, comme $p_{N+1}=0$ on déduit immédiatement que $p_2=N-1$. Or comme M est un sous-espace $(N-1)$-supercyclique pour R_N, il existe une suite strictement croissante $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $N-1$ suites réelles $(\lambda_1^{(n_i)})_{i\in\mathbb{N}}, \ldots, (\lambda_{N-1}^{(n_i)})_{i\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\left(\begin{array}{c} a_1^{n_i} R_{\theta_1}^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{N-1}\lambda_j^{(n_i)}\begin{pmatrix} x_1^j \\ x_2^j\end{pmatrix}\right) \\ a_2^{n_i} R_{\theta_2}^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{N-1}\lambda_j^{(n_i)}\begin{pmatrix} x_3^j \\ x_4^j\end{pmatrix}\right) \\ \vdots \\ a_N^{n_i} R_{\theta_N}^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{p_N}\lambda_j^{(n_i)}\begin{pmatrix} x_{2N-1}^j \\ x_{2N}^j\end{pmatrix}\right)\end{array}\right) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\end{array}\right) \tag{2.8}$$

Par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait dans la récurrence pour $p_k = p_{k+1}$, on remarque que pour tout $1 \leq j \leq p_2 = N-1$, $a_2^{n_i}\lambda_j^{(n_i)} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et comme $|a_1| \leq |a_2|$, alors pour tout $1 \leq j \leq N-1$, $a_1^{n_i}\lambda_j^{(n_i)} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais ceci contredit (2.8). Donc R_N n'est pas $(N-1)$-supercyclique.

□

Nous allons utiliser plusieurs fois l'argument de réduction de base de la preuve précédente, c'est pourquoi nous avons choisi d'expliquer cet argument de façon détaillée dans la partie suivante afin de pouvoir y faire référence plus tard.

2.3.3 Réduction de base

Soient $m, N \in \mathbb{N}^*$, T un opérateur sur $\mathbb{R}^N$, $\{x^1, \ldots, x^m\}$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^N$ et M engendré par ces vecteurs. T peut se réduire sous forme de Jordan de la façon que l'on a vu précédemment, on peut donc supposer que T est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} a_1\mathcal{B}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2\mathcal{B}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_\gamma\mathcal{B}_\gamma \end{pmatrix}$$

où pour tout $1 \leq i \leq \gamma$,

$$\mathcal{B}_i = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_i & \mathcal{A}_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_i & \mathcal{A}_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \mathcal{A}_i \\ 0 & \cdots & & 0 & \mathcal{A}_i \end{pmatrix}$$

est un bloc de Jordan classique ou réel et où $\mathcal{A}_i = 1$, respectivement $\mathcal{A}_i = R_{\theta_i}$ et γ est le nombre de blocs de Jordan dans la décomposition de T. On note également $\tau_i = 1$ si $\mathcal{B}_i$ est classique et $\tau_i = 2$ si $\mathcal{B}_i$ est réel et on note $\tau_i\rho_i$ la taille du bloc $\mathcal{B}_i$. ρ_i sera appelé la taille relative du bloc de Jordan $\mathcal{B}_i$. Si $\mathcal{B}_i$ est un bloc classique alors sa taille relative est tout simplement sa taille. Par contre, si $\mathcal{B}_i$ est un bloc réel, alors sa taille relative est égale à la moitié de sa taille. On note enfin $\rho = \sum_{i=1}^{\gamma}\rho_i$ la taille relative de la matrice T. Il est bon de remarquer qu'avec ces notations $N = \sum_{i=1}^{\gamma}\rho_i\tau_i$.

Notation. Dans un souci de clarté, nous introduisons une nouvelle notation avant d'énoncer le théorème suivant. Soit T un opérateur linéaire sur $\mathbb{R}^N$ réduit sous forme de Jordan et soit $x \in \mathbb{R}^N$. On définit pour $1 \leq i \leq \rho$:

$$\chi_i(x) = \begin{cases} x_{\sum_{l=1}^{p-1} \tau_l \rho_l + i - \sum_{l=1}^{p-1} \rho_l} & \text{si } \tau_p = 1. \\ \begin{pmatrix} x_{\sum_{l=1}^{p-1} \tau_l \rho_l + 2(i - \sum_{l=1}^{p-1} \rho_l) - 1} \\ x_{\sum_{l=1}^{p-1} \tau_l \rho_l + 2(i - \sum_{l=1}^{p-1} \rho_l)} \end{pmatrix} & \text{si } \tau_p = 2. \end{cases}$$

où p est l'unique entier vérifiant : $\sum_{l=1}^{p-1} \rho_l < i \leq \sum_{l=1}^{p} \rho_l$. Intuitivement p est le numéro du bloc $\mathcal{B}_p$ de T qui agit sur la composante $\chi_i(x)$. Cette formule, bien qu'un peu compliquée dans les termes, reflète une idée très simple : les blocs $\mathcal{B}_i$ sont des blocs de Jordan classiques ou réels, or on voit le premier comme une matrice composée de sous matrices de dimension 1 alors que le deuxième est vu comme une matrice formée à partir de sous-matrices de dimension 2. Ainsi, quand on applique $\mathcal{B}_i$ à un vecteur, il faut que le vecteur soit vu comme à composantes dans $\mathbb{R}$ dans le cas classique et à composantes dans $\mathbb{R}^2$ dans le cas réel. Ainsi, il faut avoir un "bon découpage" des vecteurs $x^1, \ldots, x^m$, qui prenne en compte le fait que sur certaines parties on fait agir un opérateur de dimension 1 et sur d'autres un opérateur de dimension 2. Par conséquent chaque $\chi_i(x)$ est soit un nombre réel soit un vecteur de taille 2. Illustrons ceci sur un exemple.

Considérons l'opérateur $T = \begin{pmatrix} a\mathcal{B}_1 & 0 & 0 \\ 0 & b\mathcal{B}_2 & 0 \\ 0 & 0 & c\mathcal{B}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & bR_\theta & bR_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & bR_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ qui agit sur $\mathbb{R}^7$.

Dans ce cas, $\tau_1 = 1, \tau_2 = 2, \tau_3 = 1, \rho_1 = 1, \rho_2 = 2, \rho_3 = 2$ et l'on décompose $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ de la façon suivante $x = \begin{pmatrix} \chi_1(x) \\ \chi_2(x) \\ \chi_3(x) \\ \chi_4(x) \\ \chi_5(x) \end{pmatrix}$ avec $\chi_1(x) = x_1$, $\chi_2(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \chi_3(x) = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \chi_4(x) = x_6, \chi_5(x) = x_7$.

Nous énonçons à présent le théorème de réduction qui sera un des outils majeurs dans la preuve des résultats annoncés.

Théorème 2.9. *Soit T un opérateur sur $\mathbb{R}^N$ réduit sous forme de Jordan avec les notations ci-dessus et soit M un sous espace de dimension m.*
Alors, il existe une base $\{y^1, \ldots, y^m\}$ de M, une suite croissante d'entiers $(\kappa_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et une suite d'ensembles $(\Lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^2$ vérifiant :
(a) $\kappa_0 = 1$, $\Lambda_0 = \{\chi_\rho(y^j), \kappa_0 \leq j \leq m\}$.

(b) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\kappa_{i+1} = \kappa_i + \dim(\mathit{Vect}(\Lambda_i))$ et $\Lambda_{i+1} = \{\chi_{\rho-(i+1)}(y^j), \kappa_{i+1} \leq j \leq m\}$.

(c) Pour tout $i \in \{0, \ldots, \rho - 1\}$, $\{\chi_{\rho-i}(y^j), \kappa_i \leq j < \kappa_{i+1}\}$ est soit libre soit vide.

(d) $\kappa_\rho = m+1$.

(e) Pour tout $p \in \{1, \dots, \rho\}$ *et pour tout* $j \in \{\kappa_p, \dots, m\}$, $\chi_{\rho-p+1}(y^j) = 0$ *ou* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Preuve :

On se propose de trouver une base de M qui soit adaptée à cette décomposition de T. Bien évidemment cette réduction dépend fortement de T. Soit $x^1, \dots, x^m$ une base de M. Nous allons créer une suite croissante de nombres entiers $(\kappa_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'entiers et une suite d'ensembles $(\Lambda'_p)_{p\in\mathbb{N}}$. La suite d'entiers sera le marqueur qui nous indiquera à chaque étape jusqu'où la base a été simplifiée et la suite d'ensembles nous indique à chaque étape la partie des vecteurs que nous allons réduire.

Posons $\kappa_0 = 1$ et $\Lambda'_0 = \{\chi_\rho(x^i), \kappa_0 \leq i \leq m\}$. Comme pour tout $1 \leq i \leq m$, $\chi_\rho(x^i)$ est un élément soit de $\mathbb{R}$ soit de $\mathbb{R}^2$, il est clair que $\dim(\mathrm{Vect}(\Lambda'_0)) = 0, 1$ ou 2.

• Si $\dim(\mathrm{Vect}(\Lambda'_0)) = 0$, alors $\|\chi_\rho(x^i)\| = 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et on pose $\kappa_1 := \kappa_0$ et $x_1^j := x^j$ pour tout $\kappa_0 \leq j \leq m$.

• Si $\dim(\mathrm{Vect}(\Lambda'_0)) = 1$, alors en considérant des combinaisons linéaires de $x^1, \dots, x^m$ et quitte à les réordonner, on obtient une nouvelle base $x_1^1, \dots, x_1^m$ de M satisfaisant $\|\chi_\rho(x_1^1)\| = 1$ et $\|\chi_\rho(x_1^i)\| = 0$ pour tout $\kappa_0 + 1 \leq i \leq m$ et l'on pose $\kappa_1 := \kappa_0 + 1$.

• Si $\dim(\mathrm{Vect}(\Lambda'_0)) = 2$, alors quitte à considérer des combinaisons linéaires des vecteurs $x^1, \dots, x^m$ et quitte à les réordonner, on obtient une nouvelle base $x_1^1, \dots, x_1^m$ de M vérifiant $\chi_\rho(x_1^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\chi_\rho(x_1^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\|\chi_\rho(x_1^i)\| = 0$ pour tout $\kappa_0 + 2 \leq i \leq m$ et l'on pose $\kappa_1 := \kappa_0 + 2$.

On pose

$$\Lambda'_1 = \{\chi_{\rho-1}(x_1^i), \kappa_1 \leq i \leq m\}$$

ainsi $\dim(\mathrm{Vect}(\Lambda'_1)) = 0, 1$ ou 2. On définit alors $x_2^i := x_1^i$ pour tout $1 \leq i < \kappa_1$. Quitte à prendre des combinaisons linéaires des vecteurs $x_1^{\kappa_1}, \dots, x_1^m$ et à les réordonner, on obtient $m - \kappa_1 + 1$ vecteurs $x_2^{\kappa_1}, \dots, x_2^m$ vérifiant $\mathrm{Vect}(x_2^1, \dots, x_2^m) = M$ et satisfaisant une des conditions suivantes :

• Si $\dim(\mathrm{Vect}(\Lambda'_1)) = 0$, alors $\|\chi_{\rho-1}(x_2^i)\| = 0$ pour tout $\kappa_1 \leq i \leq m$ et on pose $\kappa_2 := \kappa_1$.

• Si $\dim(\mathrm{Vect}(\Lambda'_1)) = 1$, alors $\|\chi_{\rho-1}(x_2^{\kappa_1})\| = 1$ et $\|\chi_{\rho-1}(x_2^i)\| = 0$ pour tout $\kappa_1 + 1 \leq i \leq m$ et $\kappa_2 := \kappa_1 + 1$.

• Si $\dim(\mathrm{Vect}(\Lambda'_1)) = 2$, alors $\chi_{\rho-1}(x_2^{\kappa_1}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\chi_{\rho-1}(x_2^{\kappa_1+1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\|\chi_{\rho-1}(x_2^i)\| = 0$ pour $\kappa_1 + 2 \leq i \leq m$ et $\kappa_2 := \kappa_1 + 2$.

Supposons que cette construction a été faite jusqu'à obtenir $x_k^1, \dots, x_k^m$. On pose

$$\Lambda'_k = \{\chi_{\rho-k}(x_k^i), \kappa_k \leq i \leq m\}$$

ainsi $\dim(\mathrm{Vect}(\Lambda'_k)) = 0, 1$ ou 2. Ensuite, on définit $x_{k+1}^i = x_k^i$ pour tout $1 \leq i < \kappa_k$. Quitte à considérer des combinaisons linéaires des vecteurs $x^{\kappa_k}, \dots, x^m$ et à les réordonner, on obtient $m - \kappa_k + 1$ vecteurs $x_{k+1}^{\kappa_k}, \dots, x_{k+1}^m$ avec $\mathrm{Vect}(x_{k+1}^1, \dots, x_{k+1}^m) = M$ et qui satisfont une des conditions suivantes :

• Si $\dim(\mathrm{Vect}(\Lambda_k')) = 0$, alors $\|\chi_{\rho-k}(x_{k+1}^i)\| = 0$ pour tout $\kappa_k \leq i \leq m$ et $\kappa_{k+1} := \kappa_k$.

• Si $\dim(\mathrm{Vect}(\Lambda_k')) = 1$, alors $\|\chi_{\rho-k}(x_{k+1}^{\kappa_k})\| = 1$ et $\|\chi_{\rho-k}(x_{k+1}^i)\| = 0$ pour tout $\kappa_k + 1 \leq i \leq m$ et on pose $\kappa_{k+1} := \kappa_k + 1$.

• Si $\dim(\mathrm{Vect}(\Lambda_k')) = 2$, alors

$$\chi_{\rho-k}(x_{k+1}^{\kappa_k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \chi_{\rho-k}(x_{k+1}^{\kappa_1+1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \|\chi_{\rho-k}(x_{k+1}^i)\| = 0$$

pour tout $\kappa_k + 2 \leq i \leq m$ et on définit $\kappa_{k+1} := \kappa_k + 2$.

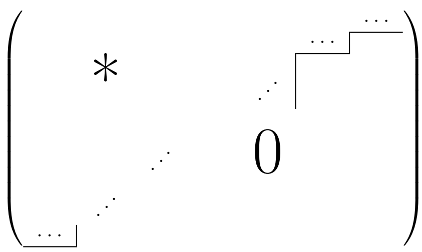
Par ce procédé, on finit par obtenir une base $(y^1, \dots, y^m) := (x_\rho^1, \dots, x_\rho^m)$ de M et pour des raisons techniques, on définit $\kappa_q := \kappa_\rho$ pour tout $q > \rho$. On définit également

$$\Lambda_0 = \{\chi_\rho(y^j), \kappa_0 \leq j \leq m\} \text{ et } \Lambda_i = \{\chi_{\rho-i}(y^j), \kappa_i \leq j \leq m\}$$

et donc (a) est vérifiée par définition. Pour satisfaire (b), (c) et (e), il suffit de remarquer que $\dim(\mathrm{Vect}(\Lambda_i)) = \dim(\mathrm{Vect}(\Lambda_i'))$. Enfin, (d) est aussi vérifié. En effet, comme $(y^1, \dots, y^m)$ est une base de M, il s'ensuit que y^m n'est pas nul. D'où $\Lambda_\rho = \emptyset$ ($\Leftrightarrow \kappa_\rho = m + 1$).

□

Remarque 2.10. On peut visualiser la réduction que nous venons d'opérer comme un escalier renversé :



Toutes les notations que nous venons d'introduire seront utilisés dans toute la suite, nous y ferons référence à chaque fois que l'on utilisera la réduction de Jordan ou que l'on réduira une base. Quand nous aurons besoin du Théorème 2.9, nous dirons simplement qu'une certaine base à été réduite et que la réduction est adaptée à un certain opérateur.

Notation. A partir de maintenant, nous allons manipuler des familles de vecteurs $\{x^1, \dots, x^m\}$. Pour simplifier les notations, nous n'utiliserons plus la notation précédente $\chi_i(x^j)$ mais nous la remplacerons par la notation χ_i^j qui est plus compacte.

2.3.4 Le cas des matrices primaires

Nous allons mettre en application la technique de réduction que nous venons de développer sur un premier type de matrices que nous appellerons matrices primaires. Ces matrices sont une généralisation, dans un cadre réel, des matrices diagonales que l'on peut rencontrer quand on opère une réduction de Jordan dans le cas complexe. En effet, les matrices primaires sont des matrices qui peuvent s'écrire comme somme directe de blocs de Jordan classiques ou réels de taille relative 1.

Définition 2.11. Soit $\rho, N \in \mathbb{N}^*$. On dira qu'un opérateur T sur $\mathbb{R}^N$ est primaire d'ordre k si $T = \oplus_{i=1}^{\rho} \mathcal{A}_i$ où $\mathcal{A}_i = 1$ ou R_{θ_i} avec $\theta_i \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.12. Il est clair que si T est primaire d'ordre ρ sur $\mathbb{R}^N$, alors $\rho \in \llbracket \lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor, N \rrbracket$. De plus, ρ est la taille relative de T.

Dans un premier temps, nous allons travailler sur les matrices primaires d'ordre ρ pour ensuite passer à des cas plus élaborés. Même si le résultat suivant est une généralisation partielle de la Proposition 2.8, la preuve de la proposition suivante est indépendante de la précédente. De plus, la preuve de cette proposition exhibe quelques idées qui nous seront d'utilité constante dans la suite.

Proposition 2.13. *Soit $\rho \in \mathbb{N}^*$. Il n'existe pas de matrice primaire d'ordre ρ qui soit $(\rho - 1)$-supercyclique.*

Preuve :
Soit $T = \oplus_{i=1}^{\rho} \mathcal{A}_i$ une matrice primaire d'ordre ρ. Remarquons que pour une telle matrice, en reprenant les notations que nous avons définies en introduisant les bases adaptées, on a $\rho_i = 1$ pour tout $1 \leq i \leq \rho$.

Par l'absurde, supposons que T est $(\rho-1)$-supercyclique. Soit $M = \mathrm{Vect}(x^1, \ldots, x^{\rho-1})$ un sous-espace $(\rho - 1)$-supercyclique pour T. On peut réduire la base de M avec la technique que l'on a détaillée précédemment dans le Théorème 2.9.

Il faut tout d'abord remarquer que suite à cette décomposition, pour tout $p < \rho$, $\kappa_p \neq \kappa_{p+1}$. En effet, supposons par l'absurde que $p < \rho$ est le plus petit entier vérifiant $\kappa_p = \kappa_{p+1}$. Par définition, cela implique que $\dim(\mathrm{Vect}(\Lambda_p)) = 0$ et donc pour tout $\kappa_p \leq j \leq \rho - 1$, $\|\chi^j_{\rho-p}\| = 0$. Or, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et toute suite de nombres réels $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq \rho-1}$,

$$T^i\left(\sum_{j=1}^{\rho-1} \lambda_j x^j\right) = \begin{cases} \mathcal{A}_1^i\left(\sum_{j=1}^{\rho-1} \lambda_j \chi_1^j\right) & (L_1) \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{A}_{\rho-p}^i\left(\sum_{j=1}^{\kappa_p-1} \lambda_j \chi_{\rho-p}^j\right) & (L_{\rho-p}) \\ \mathcal{A}_{\rho-p+1}^i\left(\sum_{j=1}^{\kappa_p-1} \lambda_j \chi_{\rho-p+1}^j\right) & (L_{\rho-p+1}) \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{A}_{\rho}^i\left(\sum_{j=1}^{\kappa_1-1} \lambda_j \chi_{\rho}^j\right) & (L_\rho) \end{cases}$$

Il est clair que si $p = 0$, alors (L_ρ) est nulle par la condition (e) du Théorème 2.9 et ainsi M n'est pas $(\rho - 1)$-supercyclique pour T. On peut donc supposer $p > 0$ sans perte de généralité. Comme T est $(\rho - 1)$-supercyclique pour M, il existe une suite d'entiers strictement croissante $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $\rho-1$ suite de nombres réels $(\lambda_1^{(n_i)})_{i\in\mathbb{N}}, \ldots, (\lambda_{\rho-1}^{(n_i)})_{i\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $j \in \llbracket 1, \rho\rrbracket \setminus \{\rho - p\}$,

$$(L_j) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } (L_{\rho-p}) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} Y \text{ avec } \|Y\| = 1.$$

On va montrer que pour tout $1 \leq j < \kappa_p$, $\lambda_j^{(n_i)} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Un tel entier j est contenu dans un unique intervalle $[\kappa_q, \kappa_{q+1}[$, nous allons donc montrer cette propriété par récurrence sur q.
Pour $1 \leq j < \kappa_1$, il suffit d'analyser (L_ρ). En effet, on sait que la famille $\{\chi_\rho^j\}_{1\leq j<\kappa_1} \neq \emptyset$

est libre ainsi comme $\mathcal{A}_\rho$ est une isométrie, (L_ρ) donne : $\sum_{j=1}^{\kappa_1-1} \lambda_j^{(n_i)} \chi_\rho^j \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et enfin $\lambda_j^{(n_i)} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $1 \leq j < \kappa_1$ car les vecteurs sont libres.
Supposons maintenant que nous avons vérifié l'hypothèse de récurrence jusqu'au rang $1 \leq q < p$ et vérifions la au rang $q+1$. Puisque $(L_{\rho-q})$ tend vers 0 et que $\mathcal{A}_{\rho-q}$ est une isométrie, on a :

$$\sum_{j=1}^{\kappa_{q+1}-1} \lambda_j^{(n_i)} \chi_{\rho-q}^j \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, par hypothèse de récurrence $\lambda_j^{(n_i)} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $1 \leq j < \kappa_q$. Ainsi, on peut encore écrire

$$\sum_{j=\kappa_q}^{\kappa_{q+1}-1} \lambda_j^{(n_i)} \chi_{\rho-q}^j \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Or, on sait que $\{\chi_{\rho-q}^j\}_{\kappa_q \leq j < \kappa_{q+1}} \neq \emptyset$ forme une famille libre par la propriété de la réduction qui a été opérée et car $\kappa_q \neq \kappa_{q+1}$. Ainsi l'expression précédente implique $\lambda_j^{(n_i)} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $1 \leq j < \kappa_{q+1}$. Ce qui termine la récurrence.

Ainsi, pour tout $1 \leq j < \kappa_p$, $\lambda_j^{(n_i)} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En utilisant ceci dans $(L_{\rho-p})$ et comme $\mathcal{A}_{\rho-p}$ est une isométrie, on obtient :

$$\mathcal{A}_{\rho-p}^i \left(\sum_{j=1}^{\kappa_p-1} \lambda_j^{(n_i)} \chi_{\rho-p}^j \right) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ce dernier résultat contredit l'hypothèse que $(L_{\rho-p})$ converge vers un vecteur de norme 1. On a donc prouvé que pour tout $p < \rho$, $\kappa_p \neq \kappa_{p+1}$. Or comme $\kappa_0 = 1$ et que la suite $(\kappa_p)_{0\leq p\leq\rho}$ est strictement croissante, on obtient $\kappa_{\rho-1} \geq \rho$ et donc $\kappa_\rho = \kappa_{\rho-1}$ en utilisant le Théorème 2.9, d'où la contradiction. Il s'ensuit donc que T n'est pas $(\rho-1)$-supercyclique.

□

2.3.5 Le cas des blocs de Jordan réels

Une fois le cas des matrices primaires traité, nous allons passer au cas d'un bloc de Jordan réel et généraliser la Proposition 2.5. Les deux lemmes suivants nous seront d'une grande utilité afin d'écrire de façon plus maniable les itérés d'un sous-espace par un bloc de Jordan réel.

Lemme 2.14. *Considérons la suite récurrente $\Delta_n(i) := \binom{i}{n} - \sum_{k=1}^{n-1} \Delta_k(i)\binom{i}{n-k}$ pour $n \geq 0$ et tout $i \geq 0$. Alors, Δ_n est un polynôme en i de degré n et dont le coefficient dominant est $\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$.*

Preuve :
Nous allons procéder par récurrence sur $n \geq 0$. Il est clair que ceci est vrai pour $n = 1$ puisque $\Delta_1(i) = i$. Supposons que ceci est vérifié pour tout $1 \leq k < n$ et montrons le pour $k = n$. Notons δ_n le coefficient dominant de Δ_n. Comme le coefficient dominant en i de $\binom{i}{k}$ est $\frac{1}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et grâce à l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\delta_n = \frac{1}{n!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(n-k)!k!} = \frac{1}{n!}\left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1}\binom{n}{k}\right).$$

Il suffit donc de travailler sur $\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}$. Pour cela, il suffit de remarquer que :

$$-(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}x^k = \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}x^k + (-1+(-1)^{n+1}x^n).$$

En observant cette égalité pour $x=1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^{k+1} = 1+(-1)^n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair,} \\ 2 \text{ si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\delta_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} \text{ si } n \text{ est impair} \\ -\frac{1}{n!} \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}.$$

Ceci termine la récurrence et la preuve de ce lemme.

□

On complète le lemme précédent avec celui-ci qui motive l'introduction des coefficients Δ_n.

Lemme 2.15. *Soient $i,n\in\mathbb{N}$ avec $i\geq n$ et $(u_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite de nombres réels. On définit pour $1\leq k\leq n$ $L_k := \sum_{j=0}^{n-k}\binom{i}{j}u_{k+j}$. Alors, $L_k = u_k + \sum_{j=1}^{n-k}\Delta_j(i)L_{k+j}$.*

Preuve :

Nous allons montrer ce résultat par récurrence sur n.
Si $n=1$, alors $L_1 =:= \sum_{j=0}^{1-1}\binom{i}{j}u_{1+j} = u_1$.
Supposons que l'hypothèse de récurrence soit vérifiée pour tout entier strictement inférieur à n et montrons la pour n.
Pour cela, pour $1\leq k<n$ on pose :

$$\mathcal{L}_k = \sum_{j=0}^{n-k-1}\binom{i}{j}u_{k+j} = L_k - \binom{i}{n-k}u_n.$$

Par hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\mathcal{L}_k = u_k + \sum_{j=1}^{n-k-1}\Delta_j(i)\mathcal{L}_{k+j}.$$

Or $L_n = u_n$ par définition et pour $1\leq k\leq n-1$,

$$L_k = \mathcal{L}_k + \binom{i}{n-k}u_n = u_k + \sum_{j=1}^{n-k-1}\Delta_j(i)\mathcal{L}_{k+j} + \binom{i}{n-k}u_n.$$

Ainsi, en utilisant encore la relation entre L_k et $\mathcal{L}_k$ et la définition de $\Delta_{n-k}(i)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
L_k &= u_k + \sum_{j=1}^{n-k-1} \Delta_j(i) \left(L_{k+j} - \binom{i}{n-k-j} u_n \right) + \binom{i}{n-k} u_n \\
&= u_k + \sum_{j=1}^{n-k-1} \Delta_j(i) L_{k+j} + \left(\binom{i}{n-k} - \sum_{j=1}^{n-k-1} \Delta_j(i) \binom{i}{n-k-j} \right) u_n \\
&= u_k + \sum_{j=1}^{n-k-1} \Delta_j(i) L_{k+j} + \Delta_{n-k}(i) u_n \\
&= u_k + \sum_{j=1}^{n-k} \Delta_j(i) L_{k+j}
\end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence.

□

La proposition suivante donne un minorant de l'indice de supercyclicité d'un bloc de Jordan réel. Pour démontrer ce résultat, nous utiliserons les deux lemmes précédents pour ré-exprimer les itérés de notre opérateur. En effet, ces deux lemmes nous permettront d'exprimer chaque composante d'un itéré de T en fonction des composantes précédentes. On pourra alors tirer parti des informations que l'on a obtenu sur ces composantes auparavant.

Proposition 2.16. *Soit $N > 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors* $J_N := \begin{pmatrix} R_\theta & R_\theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_\theta & R_\theta & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & R_\theta \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & R_\theta \end{pmatrix}$ *n'est pas N-supercyclique sur $\mathbb{R}^{2N}$.*

Preuve :

Comme nous l'avons annoncé, le cas $N = 2$ a déjà été traité dans la Proposition 2.5. Par conséquent, supposons que N est un entier supérieur ou égal à 3 et supposons, par l'absurde, que J_N est N-supercyclique et que $M = \mathrm{Vect}(x^1, \ldots, x^N)$ est un sous-espace à base réduite N-supercyclique pour J_N. On peut également remarquer que $\kappa_N = N + 1$ d'après le Théorème 2.9. De plus d'après la Proposition 2.5, J_2 n'est pas 2-supercyclique, il faut donc que $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \chi^1_{N-1} \\ \chi^1_N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \chi^2_{N-1} \\ \chi^2_N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \chi^3_{N-1} \\ \chi^3_N \end{pmatrix}\right)$ forme un espace vectoriel de dimension 3 et donc que $\kappa_2 \geq 4$. Comme M est N-supercyclique, il existe une suite d'entiers $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et N suites de nombres réels $(\lambda_1^{(n_i)})_{i\in\mathbb{N}}, \ldots, (\lambda_N^{(n_i)})_{i\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$T^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^{(n_i)} x^j\right) = \begin{pmatrix} R_\theta^{n_i} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n_i}{k} \left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^{(n_i)} \begin{pmatrix} x^j_{2k+1} \\ x^j_{2(k+1)} \end{pmatrix} \right) \\ R_\theta^{n_i} \sum_{k=0}^{N-2} \binom{n_i}{k} \left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^{(n_i)} \begin{pmatrix} x^j_{2(k+1)+1} \\ x^j_{2(k+2)} \end{pmatrix} \right) \\ \vdots \\ R_\theta^{n_i} \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^{(n_i)} \begin{pmatrix} x^j_{2N-1} \\ x^j_{2N} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \xrightarrow[i\to+\infty]{} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Notons $(L_1), \dots, (L_N)$ chaque ligne ci-dessus apparaissant dans $T^{n_i}\left(\sum_{j=1}^N \lambda_j^{(n_i)} x^j\right)$, et notons $(u_k) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^{(n_i)} \begin{pmatrix} x_{2k-1}^j \\ x_{2k}^j \end{pmatrix}$. On remarque que les (L_k) et les (u_k) dépendent de i même si ce n'est pas précisé explicitement.

On peut réécrire le système précédent de la façon suivante en utilisant le Lemme 2.15 :

$$\begin{cases} \|(u_1) + \sum_{j=1}^{N-1} \Delta_j(n_i)(L_{j+1})\| & \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0 \\ & \vdots \\ \|(u_k) + \sum_{j=1}^{N-k} \Delta_j(n_i)(L_{j+k})\| & \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0 \\ & \vdots \\ \|(u_N)\| & \xrightarrow[i\to+\infty]{} 1 \end{cases} \tag{2.9}$$

où Δ_j est défini par le Lemme 2.14.

On montre alors par récurrence sur k que $\frac{\lambda_j^{(n_i)}}{\Delta_k(n_i)} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0$, pour tout $1 \leq k \leq N-1$ et tout $1 \leq j \leq \kappa_k - 1$.
Pour $k = 1$, on reprend l'expression de (L_N) que l'on divise par $\Delta_1(n_i)$:

$$\left\| \sum_{j=\kappa_0}^{\kappa_1 - 1} \frac{\lambda_j^{(n_i)}}{\Delta_1(n_i)} \chi_N^j \right\| \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, comme $\{\chi_N^j\}_{\kappa_0 \leq j \leq \kappa_1 - 1}$ est libre (mais pas vide car $\kappa_2 \geq 4$), on obtient que :

$$\frac{\lambda_j^{(n_i)}}{\Delta_1(n_i)} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0 \text{ pour tout } \kappa_0 \leq j \leq \kappa_1 - 1.$$

Ceci termine l'initialisation de la récurrence.
Supposons l'hypothèse de récurrence vérifiée jusqu'au rang k et vérifions la au rang $k+1$.
On reprend l'expression de (L_{N-k}) que l'on divise par $\Delta_{k+1}(n_i)$:

$$\left\| \sum_{j=\kappa_0}^{\kappa_k - 1} \frac{\lambda_j^{(n_i)}}{\Delta_{k+1}(n_i)} \chi_{N-k}^j + \sum_{j=\kappa_k}^{\kappa_{k+1}-1} \frac{\lambda_j^{(n_i)}}{\Delta_{k+1}(n_i)} \chi_{N-k}^j + \sum_{j=1}^{k} \frac{\Delta_j(n_i)}{\Delta_{k+1}(n_i)} (L_{N-k+j}) \right\| \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0.$$

Il est clair que la première somme tend vers 0 en utilisant l'hypothèse de récurrence et la dernière également car (L_j) est bornée pour tout $1 \leq j \leq N$ et $\deg(\Delta_{k+1}) > \deg(\Delta_j)$ pour tout $1 \leq j \leq k$ par le Lemme 2.14. Ainsi, on obtient :

$$\left\| \sum_{j=\kappa_k}^{\kappa_{k+1}-1} \frac{\lambda_j^{(n_i)}}{\Delta_{k+1}(n_i)} \chi_{N-k}^j \right\| \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0$$

De plus, la technique de réduction de base nous apprend que $\{\chi_{N-k}^j\}_{\kappa_k \leq j \leq \kappa_{k+1}-1}$ est libre ou vide. Par conséquent, on a :

$$\frac{\lambda_j^{(n_i)}}{\Delta_{k+1}(n_i)} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0 \text{ pour tout } \kappa_k \leq j \leq \kappa_{k+1} - 1$$

et en combinant l'hypothèse de récurrence et $\deg(\Delta_{k+1}) > \deg(\Delta_j)$ pour tout $1 \leq j \leq k$, on déduit

$$\frac{\lambda_j^{(n_i)}}{\Delta_{k+1}(n_i)} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ pour tout } \kappa_0 \leq j \leq \kappa_{k+1} - 1.$$

Ceci termine la récurrence !

Revenons maintenant à la preuve de la proposition. On peut remarquer que comme $\kappa_2 \geq 4$ et $\kappa_N = N+1$, il existe $2 \leq p \leq N-1$ tel que $\kappa_p = \kappa_{p+1}$. Examinons alors (L_{N-p}) divisé par $\Delta_p(n_i)$:

$$\left\| \sum_{j=\kappa_0}^{\kappa_{p+1}-1} \frac{\lambda_j^{(n_i)}}{\Delta_p(n_i)} \chi_{N-k}^j + \sum_{j=1}^{p} \frac{\Delta_j(n_i)}{\Delta_p(n_i)} (L_{N-p+j}) \right\| \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Or $\frac{\lambda_j^{(n_i)}}{\Delta_p(n_i)} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $1 \leq j \leq \kappa_p - 1$ et comme $\kappa_p = \kappa_{p+1}$, la première somme tend vers 0 avec i. De plus, le Lemme 2.14 et le fait que toutes les suites (L_k) sont bornées nous permet de réécrire la seconde somme de la façon suivante :

$$\left\| \frac{(-1)^{p+1}}{p!} (L_N) \right\| \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Or on sait par la formule (2.9) que $\|(L_N)\| \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ceci contredit l'affirmation précédente. Ainsi, J_N n'est pas N-supercyclique.

□

2.3.6 Pour une somme de blocs de modules différents

Le lemme technique suivant permet de séparer le comportement des blocs de module différents. L'idée générale est simplement de dire que les coefficients introduits dans des blocs antérieurs n'ont plus d'influence notable dans le nouveau bloc. En effet, si l'on s'intéresse à un opérateur n-supercyclique $T = T_1 \oplus T_2$ et que l'on veut étudier son comportement asymptotique sur le sous-espace vectoriel L de dimension n, il serait alors agréable de dire qu'un des deux opérateurs agit seulement sur une partie des vecteurs de base de L et que l'autre agit simplement sur les vecteurs restants. Ceci n'est que très rarement possible puisque qu'il n'y a en général aucune raison que L se décompose en somme directe de deux sous-espaces L_1 et L_2 sur lesquels T_1 et T_2 agissent respectivement. Cependant, en réduisant la base de L, il est possible de trouver une partie "minimale" des vecteurs de base de L sur lesquels agit T_2. Après avoir fait cela, à défaut de pouvoir montrer que T_1 n'agit que sur les autres vecteurs, nous allons montrer que T_1 n'agit de manière significative que sur les autres vecteurs et que par conséquent il suffit d'étudier les comportements asymptotiques de T_1 et de T_2 pris séparément.

Lemme 2.17. *Soient $h \in \mathbb{N}$ et $\gamma, m, N \in \mathbb{N}^*$ avec $h < m$. Soit $T = a\mathcal{C}$ un opérateur de $\mathbb{R}^N$ avec $0 < |a| < 1$, $\mathcal{C} = \oplus_{i=1}^{\gamma} \mathcal{B}_i$ où $\mathcal{B}_i$ est un bloc de Jordan de module ou valeur propre 1 dont les composantes sont $\mathcal{A}_i = 1$ ou R_{θ_i}. Soit M un sous-espace de dimension $(m-h)$ et $x^1, \ldots, x^m \in \mathbb{R}^N$ où $x^{h+1}, \ldots, x^m$ est une base réduite de M (adaptée à T*

avec le Théorème 2.9) et soit $0 < |a| < |b| \leq 1$. *Supposons qu'il existe une suite d'entiers strictement croissante* $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$, *m suites réelles* $(\lambda_1^{(n_i)})_{i\in\mathbb{N}}, \ldots, (\lambda_m^{(n_i)})_{i\in\mathbb{N}}$ *et* $q \in \mathbb{N}$ *tels que :*

$$\frac{b^{n_i}\lambda_j^{(n_i)}}{n_i^q} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ pour tout } 1 \leq j \leq h \text{ et } T^{n_i}(\sum_{j=1}^m \lambda_j^{(n_i)} x^j) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Alors, il existe $q' \in \mathbb{N}$ *tel que :*

$$\frac{a^{n_i}\lambda_j^{(n_i)}}{n_i^{q'}} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ pour tout } 1 \leq j \leq m.$$

Preuve :

On note comme d'habitude $\tau_i\rho_i$ la taille du bloc $\mathcal{B}_i$ où $\tau_i = 1$ ou 2 et $\rho = \sum_{i=1}^{\gamma}\rho_i$. En décomposant T et en se rappelant que les $(m-h)$ derniers vecteurs de $\{x_1, \ldots, x_m\}$ sont réduits, on obtient la formule suivante :

$$T^{n_i}\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j^{(n_i)} x^j\right) = \begin{cases} a^{n_i}\mathcal{A}_1^{n_i}\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j^{(n_i)}\chi_1^j + \sum_{j=1}^{\rho_1-1}\binom{n_i}{j}\sum_{g=1}^{h+\kappa_{\rho-j}-1}\lambda_g^{(n_i)}\chi_{1+j}^g\right) & (L_1) \\ \vdots & \vdots \\ a^{n_i}\mathcal{A}_1^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{h+\kappa_{\rho+1-\rho_1}-1}\lambda_j^{(n_i)}\chi_{\rho_1}^j\right) & (L_{\rho_1}) \\ \vdots & \vdots \\ a^{n_i}\mathcal{A}_\gamma^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{h+\kappa_{\rho_\gamma}-1}\lambda_j^{(n_i)}\chi_{\rho+1-\rho_\gamma}^j + \sum_{j=1}^{\rho_\gamma-1}\binom{n_i}{j}\sum_{g=1}^{h+\kappa_{\rho_\gamma-j}-1}\lambda_g^{(n_i)}\chi_{\rho-\rho_\gamma+1+j}^g\right) & (L_{\rho-\rho_\gamma+1}) \\ \vdots & \vdots \\ a^{n_i}\mathcal{A}_\gamma^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{h+\kappa_1-1}\lambda_j^{(n_i)}\chi_\rho^j\right) & (L_\rho) \end{cases}$$

Nous allons souvent traiter à part les h premiers vecteurs et les $m-h$ derniers, par conséquent les notations classiques pour une base réduite se réfèrent à une réduction sur les $m-h$ derniers vecteurs.

Nous allons montrer le lemme par récurrence décroissante sur $l \in \{1, \ldots, \rho\}$. Notre hypothèse de récurrence affirme que pour tout $1 \leq l \leq \rho$, il existe $q' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $1 \leq j \leq h + \kappa_{\rho+1-l} - 1$, $\frac{a^{n_i}\lambda_j^{(n_i)}}{n_i^{q'}} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Commençons par vérifier l'hypothèse de récurrence pour $l = \rho$. En observant la ligne (L_ρ), comme de plus A_γ est une isométrie, on a :

$$a^{n_i}\left(\sum_{j=1}^h \lambda_j^{(n_i)}\chi_\rho^j + \sum_{j=h+\kappa_0}^{h+\kappa_1-1}\lambda_j^{(n_i)}\chi_\rho^j\right) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.10}$$

Or, on sait que pour tout $1 \leq j \leq h$, $\frac{b^{n_i}\lambda_j^{(n_i)}}{n_i^q} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ainsi comme $0 < |a| < |b| \leq 1$, on déduit que $a^{n_i}\lambda_j^{(n_i)} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $1 \leq j \leq h$. En couplant ceci avec (2.10), on obtient :

$$a^{n_i}\sum_{j=h+\kappa_0}^{h+\kappa_1-1}\lambda_j^{(n_i)}\chi_\rho^j \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, par définition $\{\chi_\rho^j\}_{h+\kappa_0}^{h+\kappa_1-1}$ est libre ou vide, ainsi, pour tout $1 \leq j \leq h + \kappa_1 - 1$, $a^{n_i}\lambda_j^{(n_i)} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Supposons l'hypothèse de récurrence vérifiée pour $l+1,\dots,\rho$ et montrons la au rang l. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $q' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $1 \leq j \leq h+\kappa_{\rho-l}-1$, $\frac{a^{n_i}\lambda_j^{(n_i)}}{n_i^{q'}} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Nous allons séparer la preuve en deux cas.
Si $\kappa_{\rho-l} < \kappa_{\rho+1-l}$, alors on s'intéresse à la ligne (L_l) :

$$a^{n_i}\mathcal{A}_f^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{h+\kappa_{\rho-l}-1}\lambda_j^{(n_i)}\chi_l^j + \sum_{j=h+\kappa_{\rho-l}}^{h+\kappa_{\rho+1-l}-1}\lambda_j^{(n_i)}\chi_l^j + \sum_{j=1}^{d}\binom{n_i}{j}\sum_{g=1}^{h+\kappa_{\rho+1-l-j}-1}\lambda_g^{(n_i)}\chi_{l+j}^g\right)\underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

où $f \in [\![1,\gamma]\!]$ et $d \in [\![0,\rho_f-1]\!]$. Comme A_f est une isométrie, en divisant l'équation précédente par $n_i^{q'}$ alors la première somme tend vers 0 par hypothèse de récurrence, ainsi :

$$\frac{1}{n_i^{q'}}a^{n_i}\left(\sum_{j=h+\kappa_{\rho-l}}^{h+\kappa_{\rho+1-l}-1}\lambda_j^{(n_i)}\chi_l^j + \sum_{j=1}^{d}\binom{n_i}{j}\sum_{g=1}^{h+\kappa_{\rho+1-l-j}-1}\lambda_g^{(n_i)}\chi_{l+j}^g\right)\underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.11}$$

Puis en divisant par n_i^d et en remarquant que $\frac{\binom{n_i}{j}}{n_i^d}$ est borné pour tout $1 \leq j \leq d$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence sur les $\lambda_g^{(n_i)}$ de la seconde somme, on a :

$$\frac{1}{n_i^{q'+d}}a^{n_i}\left(\sum_{j=h+\kappa_{\rho-l}}^{h+\kappa_{\rho+1-l}-1}\lambda_j^{(n_i)}\chi_l^j\right)\underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi comme $\kappa_{\rho-l} < \kappa_{\rho+1-l}$, par définition $\{\chi_l^j\}_{h+\kappa_{\rho-l}}^{h+\kappa_{\rho+1-l}-1}$ est libre, on en déduit que pour tout $1 \leq j \leq h+\kappa_{\rho+1-l}-1$,

$$\frac{a^{n_i}\lambda_j^{(n_i)}}{n_i^{q'+d}}\underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Si $\kappa_{\rho-l} = \kappa_{\rho+1-l}$, alors on fait le même raisonnement que dans le cas précédent sauf que la formule (2.11) ne contient plus le premier terme et le reste se traite de la même façon. Ceci termine la récurrence. Ainsi, il existe $q' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j \in \{1,\dots,h+\kappa_\rho-1\}$, $\frac{a^{n_i}\lambda_j^{(n_i)}}{n_i^{q'}} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Il est maintenant aisé de voir que l'on a montré le lemme puisque le Théorème 2.9 nous donne $\kappa_\rho = m-h+1$, ainsi $h+\kappa_\rho-1 = m$ et le lemme est démontré.

□

2.3.7 Pour une somme de blocs de même module

Pour comprendre ce qu'il se passe dans une somme directe de blocs de même module, nous aurons besoin du lemme suivant qui évalue la rapidité de croissance des coefficients comme nous l'avons fait dans le Lemme 2.17. Ce lemme regroupe deux résultats suivant la taille relative des deux plus gros blocs de Jordan. La preuve est basée sur les mêmes idées que celle du Lemme 2.17 mais elle est plus technique car les modules ne nous permettent pas de séparer les blocs de Jordan.

Lemme 2.18. *Soient $\gamma, m, N \in \mathbb{N}^*$, $\gamma \geq 2$. Soit $T = \oplus_{i=1}^{\gamma} \mathcal{B}_i$ un opérateur de $\mathbb{R}^N$ où $\mathcal{B}_i$ est un bloc de Jordan de module ou valeur propre 1 et dont les composantes sont $\mathcal{A}_i = 1$ ou R_{θ_i}. On supposera que l'on est dans l'un des deux cas suivants :*

$$\rho_1 \geq \ldots \geq \rho_\gamma \tag{2.12}$$

$$\rho_2 \geq \ldots \geq \rho_\gamma \text{ et } \rho_1 = \rho_2 - 1 \quad . \tag{2.13}$$

Soit M un sous-espace de dimension m et soit $x^1, \ldots, x^m \in \mathbb{R}^N$ une base réduite pour T avec le Théorème 2.9 pour laquelle il existe une suite d'entiers strictement croissante $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et m suites réelles $(\lambda_1^{(n_i)})_{i\in\mathbb{N}}, \ldots, (\lambda_m^{(n_i)})_{i\in\mathbb{N}}$ telles que

$$T^{n_i}(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(n_i)} x^j) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} (\underbrace{1, \ldots, 1}_{\rho_1 \text{ fois}}, 0, \ldots, 0).$$

Alors $\frac{\lambda_j^{(n_i)}}{n_i^{\rho_1}} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $1 \leq j \leq m$.

Preuve :

On note comme d'habitude $\tau_i \rho_i$ la taille du bloc $\mathcal{B}_i$ où $\tau_i = 1$ ou 2 et $\rho = \sum_{i=1}^{\gamma} \rho_i$. Alors,

$$T^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(n_i)} x^j\right) = \begin{cases} \mathcal{A}_1^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(n_i)} \chi_1^j + \sum_{j=1}^{\rho_1-1} \binom{n_i}{j} \sum_{g=1}^{\kappa_{\rho-j}-1} \lambda_g^{(n_i)} \chi_{1+j}^g\right) & (L_1) \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{A}_1^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{\kappa_{\rho+1-\rho_1}-1} \lambda_j^{(n_i)} \chi_{\rho_1}^j\right) & (L_{\rho_1}) \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{A}_\gamma^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{\kappa_{\rho_\gamma}-1} \lambda_j^{(n_i)} \chi_{\rho+1-\rho_\gamma}^j + \sum_{j=1}^{\rho_\gamma-1} \binom{n_i}{j} \sum_{g=1}^{\kappa_{\rho_\gamma-j}-1} \lambda_g^{(n_i)} \chi_{\rho-\rho_\gamma+1+j}^g\right) & (L_{\rho-\rho_\gamma+1}) \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{A}_\gamma^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{\kappa_1-1} \lambda_j^{(n_i)} \chi_\rho^j\right) & (L_\rho) \end{cases}$$

que l'on peut également noter de la façon suivante grâce aux Lemmes 2.14 et 2.15 :

$$T^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(n_i)} x^j\right) = \begin{cases} \mathcal{A}_1^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{(n_i)} \chi_1^j + \sum_{j=1}^{\rho_1-1} \Delta_j(n_i)(L_{1+j})\right) & (L_1) \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{A}_1^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{\kappa_{\rho+1-\rho_1}-1} \lambda_j^{(n_i)} \chi_{\rho_1}^j\right) & (L_{\rho_1}) \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{A}_\gamma^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{\kappa_{\rho_\gamma}-1} \lambda_j^{(n_i)} \chi_{\rho+1-\rho_\gamma}^j + \sum_{j=1}^{\rho_\gamma-1} \Delta_j(n_i)(L_{\rho-\rho_\gamma+1+j})\right) & (L_{\rho-\rho_\gamma+1}) \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{A}_\gamma^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{\kappa_1-1} \lambda_j^{(n_i)} \chi_\rho^j\right) & (L_\rho) \end{cases}$$

De plus, on remarque que chaque $l \in \{1, \ldots, \rho\}$ s'écrit de façon unique sous la forme $l = \rho - \sum_{j=\gamma-j+1}^{\gamma} \rho_i - d_l$ avec $j \in [\![0, \gamma-1]\!]$ et $d_l \in [\![0, \rho_{\gamma-j} - 1]\!]$. On peut donc définir sans ambigüité pour tout $l \in \{1, \ldots, \rho\}$,

$$\delta_l = \begin{cases} d_l + 1 \text{ si } j = 0, \\ \max(d_l + 1, \rho_{\gamma-j+1}) \text{ si } j \neq 0. \end{cases}$$

Intuitivement δ_l est la taille du plus grand bloc de Jordan situé en dessous de la l-ième ligne comprise (ici on parle de ligne au sens de chaque bloc, c'est-à-dire qu'une matrice de rotation compte pour une seule ligne!) de T. Posons également

$$\nu_l = \begin{cases} \delta_l & \text{si l'on est sous l'hypothèse (2.12),} \\ \delta_l - 1 & \text{si l'on est sous l'hypothèse (2.13).} \end{cases}$$

Nous allons montrer que $\frac{\lambda_j^{(n_i)}}{n_i^{\nu_l}} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $1 \leq j \leq \kappa_{\rho+1-l} - 1$, par récurrence décroissante finie sur $l \in \{1, \dots, \rho\}$.
Pour le cas $l = \rho$, comme A_γ est une isométrie, on tire de (L_ρ) :

$$\sum_{j=1}^{\kappa_1-1} \lambda_j^{(n_i)} \chi_\rho^j \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.14}$$

Or, par définition $\{\chi_\rho^j\}_{\kappa_0}^{\kappa_1-1}$ est libre ou vide, ainsi, pour tout $1 \leq j \leq \kappa_1 - 1$, $\lambda_j^{(n_i)} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Supposons l'hypothèse de récurrence vérifiée pour $l+1, \dots, \rho$. Montrons la au rang l.
D'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $1 \leq j \leq \kappa_{\rho-l} - 1$, $\frac{\lambda_j^{(n_i)}}{n_i^{\nu_{l+1}}} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Si $\kappa_{\rho-l} < \kappa_{\rho+1-l}$, alors on s'intéresse à la ligne (L_l) :

$$\left\| \mathcal{A}_f^{n_i} \left(\sum_{j=1}^{\kappa_{\rho-l}-1} \lambda_j^{(n_i)} \chi_l^j + \sum_{j=\kappa_{\rho-l}}^{\kappa_{\rho+1-l}-1} \lambda_j^{(n_i)} \chi_l^j + \sum_{j=1}^{d_l} \Delta_j(n_i) L_{l+j} \right) \right\| \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ ou } 1$$

où $f \in [\![1, \gamma]\!]$ et $d_l \in [\![0, \rho_f - 1]\!]$.
Comme A_f est une isométrie et en divisant par $n_i^{\nu_{l+1}}$, on déduit grâce à l'hypothèse de récurrence que la première somme tend vers 0 :

$$\frac{1}{n_i^{\nu_{l+1}}} \left(\sum_{j=\kappa_{\rho-l}}^{\kappa_{\rho+1-l}-1} \lambda_j^{(n_i)} \chi_l^j + \sum_{j=1}^{d_l} \Delta_j(n_i)(L_{l+j}) \right) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.15}$$

Puis en utilisant le Lemme 2.14 et en comparant ν_{l+1} et d_l, on obtient :

- Dans le cas (2.12) :

$$\begin{cases} \frac{1}{n_i^{\nu_{l+1}}} \left(\sum_{j=\kappa_{\rho-l}}^{\kappa_{\rho+1-l}-1} \lambda_j^{(n_i)} \chi_l^j \right) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0 & \text{si } d_l < \nu_{l+1} \text{ c'est-à-dire } \delta_l = \delta_{l+1}. \\ \frac{1}{n_i^{\nu_{l+1}}} \left(\sum_{j=\kappa_{\rho-l}}^{\kappa_{\rho+1-l}-1} \lambda_j^{(n_i)} \chi_l^j \right) + \frac{(-1)^{d_l+1}}{d_l!} (L_{l+d_l}) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0 & \text{si } d_l = \nu_{l+1} \text{ c'est-à-dire } \delta_l = \delta_{l+1} + 1. \end{cases}$$

Ainsi comme $\kappa_{\rho-l} < \kappa_{\rho+1-l}$, par définition $\{\chi_l^j\}_{\kappa_{\rho-l}}^{\kappa_{\rho+1-l}-1}$ est libre, on en déduit que pour tout $1 \leq j \leq \kappa_{\rho+1-l} - 1$,

$$\frac{\lambda_j^{(n_i)}}{n_i^{\delta_l}} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Dans le cas (2.13) :

$$\begin{cases} \frac{1}{n_i^{\nu_{l+1}}} \left(\sum_{j=\kappa_{\rho-l}}^{\kappa_{\rho+1-l}-1} \lambda_j^{(n_i)} \chi_l^j \right) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0 & \text{si } d_l < \nu_{l+1} \text{ donc } \delta_l = \delta_{l+1}. \\ \frac{1}{n_i^{\nu_{l+1}}} \left(\sum_{j=\kappa_{\rho-l}}^{\kappa_{\rho+1-l}-1} \lambda_j^{(n_i)} \chi_l^j \right) + \frac{(-1)^{d_l+1}}{d_l!} (L_{l+d_l}) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0 & \text{si } d_l = \nu_{l+1} \text{ donc } \delta_l = \delta_{l+1}. \\ \frac{1}{n_i^{\nu_{l+1}+1}} \left(\sum_{j=\kappa_{\rho-l}}^{\kappa_{\rho+1-l}-1} \lambda_j^{(n_i)} \chi_l^j \right) + \frac{(-1)^{d_l+1}}{d_l!} (L_{l+d_l}) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0 & \text{si } d_l = \nu_{l+1} + 1, \text{ c'est-à-dire } \delta_l = \delta_{l+1} + 1. \end{cases}$$

Or dans le deuxième et le troisième cas ci-dessus, comme $\rho_1 < \rho_2$, on ne travaille pas encore sur le bloc $\mathcal{B}_1$ car la condition $\rho_1 = \rho_2 - 1$ n'est pas compatible avec $d_l = \delta_{l+1} - 1$ ou $d_l = \delta_{l+1}$ données par ces deux cas. Donc $(L_{l+d_l}) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus, comme $\kappa_{\rho-l} < \kappa_{\rho+1-l}$, par définition $\{\chi_l^j\}_{\kappa_{\rho-l}}^{\kappa_{\rho+1-l}-1}$ est libre et on en déduit que pour tout $1 \leq j \leq \kappa_{\rho+1-l} - 1$,

$$\frac{\lambda_j^{(n_i)}}{n_i^{\delta_l - 1}} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Si $\kappa_{\rho-l} = \kappa_{\rho+1-l}$, alors on fait le même raisonnement que dans le cas précédent sauf que la formule (2.15) ne contient plus le premier terme et le reste se traite de la même façon.

Ceci termine la récurrence. Ainsi, pour tout $1 \leq j \leq \kappa_\rho - 1$, $\frac{\lambda_j^{(n_i)}}{n_i^{\nu_1}}$.

Il est maintenant aisé de voir que l'on a montré le lemme puisque la réduction du Théorème 2.9 donne $\kappa_\rho - 1 = m$, il suffit ensuite d'utiliser la définition de ν_1 : dans le cas (2.12), c'est la taille du plus grand bloc c'est-à-dire ρ_1, et dans le cas (2.13) c'est la taille du plus grand bloc auquel on retranche 1 c'est-à-dire $\rho_2 - 1$.

$\square$

On peut maintenant énoncer un premier résultat sur les opérateurs qui s'écrivent comme somme directe de blocs de Jordan de module (valeur propre) 1.

Théorème 2.19. *Soit T un opérateur sur $\mathbb{R}^N$. Si T est une somme directe de blocs de Jordan de module (valeur propre) 1, alors T n'est pas $(\rho - 1)$-supercyclique.*

Preuve :

Soit T une somme directe de blocs de Jordan de module (valeur propre) 1. On appelle degré de T l'entier $D := \sum_{i=1}^{\gamma}(\rho_i - 1)$.

Nous allons montrer la proposition par récurrence sur le degré D de T !

Si $D = 0$, T est une matrice primaire d'ordre $\gamma = \rho$ et l'on a déjà montré dans la Proposition 2.13 qu'une telle matrice ne pouvait pas être $(\gamma - 1)$ supercyclique.

Supposons la récurrence démontrée du degré 0 jusqu'au degré $D - 1$, montrons la pour le degré D. On suppose par l'absurde que T est $(\rho - 1)$-supercyclique. Sans perte de généralité, on peut supposer que T se décompose de la façon suivante $T = \oplus_{i=1}^{\gamma}\mathcal{B}_i$ où les $\mathcal{B}_i$ sont des blocs de Jordan de module (valeur propre) 1 et où $\rho_1 \geq \ldots \geq \rho_\gamma$. De plus, si T est composé d'un seul bloc de Jordan, alors on sait que T n'est pas $(\rho - 1)$-supercyclique d'après la Proposition 2.16 pour le cas d'un bloc de Jordan réel et d'après [13] pour le cas d'un bloc de Jordan classique. On peut donc supposer $\gamma \geq 2$ et aussi $\rho_1 > 1$ grâce à la Proposition 2.13.

Ainsi on décompose :

$$T = \left(\begin{array}{c|cccc|ccc}
\mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cline{1-5}
0 & \multicolumn{4}{c|}{\mathcal{C}_1} & 0 & \cdots & 0 \\
\cline{1-5}
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \mathcal{B}_2 & \ddots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{B}_\gamma
\end{array}\right)$$

avec $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{array}{c|cccc} \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \mathcal{C}_1 & \end{array}\right)$. Notons S la sous-matrice de T que l'on obtient en prenant la somme directe de $\mathcal{C}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_\gamma$. Comme T est $(\rho-1)$-supercyclique, on suppose que $M = \mathrm{Vect}(x^1, \ldots, x^{\rho-1})$ est un sous-espace $(\rho-1)$-supercyclique à base réduite pour T avec le Théorème 2.9. Par hypothèse de récurrence, S n'est pas $(\rho-2)$-supercyclique, on en déduit qu'il existe $p < \rho$ tel que $\kappa_p = \rho$ et donc dans la base réduite le vecteur $x^{\rho-1}$ n'est pas nul pour S.

En effet, si l'on suppose par l'absurde que $\kappa_{\rho-1} < \rho$, alors $\chi_j^{\rho-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour tout $2 \leq j \leq \rho$ et donc $d := \dim(\mathrm{Vect}((\chi_j^1)_{2\leq j\leq\rho}, \ldots, (\chi_j^{\rho-1})_{2\leq j\leq\rho})) \leq \rho-2$. Or comme M est $(\rho-1)$-supercyclique pour T, alors S est d-supercyclique. Ceci contredit le fait que S n'est pas $(\rho-2)$-supercyclique. Donc il existe bien $p < \rho$ tel que $\kappa_p = \rho$.

Comme T est $(\rho-1)$-supercyclique, il existe aussi une suite d'entiers strictement croissante $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $\rho-1$ suites de nombres réels $(\lambda_1^{(n_i)})_{i\in\mathbb{N}}, \ldots, (\lambda_{\rho-1}^{(n_i)})_{i\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$T^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{\rho-1} \lambda_j^{(n_i)} x^j\right) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} (\underbrace{1, \ldots, 1}_{\rho_1 \text{ fois}}, 0, \ldots, 0).$$

A ce stade, il y a deux possibilités : soit $\rho_1 - 1 \geq \rho_2$, soit $\rho_1 = \rho_2$. Dans ces deux cas, on applique le Lemme 2.18, avec $T = S$ et l'on obtient que $\frac{\lambda_j^{(n_i)}}{n_i^{\rho_1-1}} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et ceci pour tout $1 \leq j \leq \rho-1$ puisqu'il existe $p < \rho$ tel que $\kappa_p = \rho$. D'autre part, en appliquant le Lemme 2.15 et en prenant la première limite de la première ligne de $T^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{\rho-1} \lambda_j^{(n_i)} x^j\right)$, on obtient :

$$\left\| \mathcal{A}_1^{n_i} \sum_{j=1}^{\rho-1} \lambda_j^{(n_i)} \chi_1^j + \sum_{j=1}^{\rho_1-1} \Delta_j(n_i)(L_{1+j}) \right\| \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

En divisant cette ligne par $n_i^{\rho_1-1}$ et comme $\mathcal{A}_1$ est une isométrie , on obtient :

$$\sum_{j=1}^{\rho-1} \frac{\lambda_j^{(n_i)}}{n_i^{\rho_1-1}} \chi_1^j + \sum_{j=1}^{\rho_1-1} \frac{\Delta_j(n_i)}{n_i^{\rho_1-1}}(L_{1+j}) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Comme l'on a vu ci-dessus que $\frac{\lambda_j^{(n_i)}}{n_i^{\rho_1-1}} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et grâce au Lemme 2.14, on réduit l'identité précédente à la suivante qui ne fait intervenir que le terme en $j = \rho_1 - 1$:

$$\frac{(-1)^{\rho_1}}{(\rho_1-1)!} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci est contradictoire et donc T n'est pas $(\rho-1)$-supercyclique. Ce qui termine la récurrence et la preuve du théorème.

□

2.3.8 Cas général

Nous voici arrivé au théorème qui nous permet de regrouper les comportements des blocs et de traduire ceci pour l'opérateur dans son ensemble.

Théorème 2.20. *Soit T un opérateur de la forme $T = \oplus_{i=1}^{\gamma} a_i\mathcal{C}_i$ où $|a_1| < \cdots < |a_\gamma| \leq 1$ pour tout $1 \leq i \leq \gamma$, $\mathcal{C}_i$ est une somme directe de blocs de Jordan de valeur propre 1 ou de module 1. On suppose que pour tout $1 \leq i \leq \gamma$, $\mathcal{C}_i$ est m_i-supercyclique et que cette valeur est minimale. Alors, T n'est pas $((\sum_{i=1}^{\gamma} m_i) - 1)$-supercyclique.*

Preuve :

Posons $T_p := \oplus_{i=\gamma+1-p}^{\gamma} a_i\mathcal{C}_i$ et notons $t(p)$ la taille de cette matrice. Nous allons montrer par récurrence sur $1 \leq p \leq \gamma$ que T_p n'est pas $\big((\sum_{i=\gamma+1-p}^{\gamma} m_i) - 1\big)$-supercyclique. En fait, nous allons montrer un peu plus que ça :

Pour tout $1 \leq p \leq \gamma$, T_p n'est pas $\left((\displaystyle\sum_{i=\gamma+1-p}^{\gamma} m_i) - 1\right)$-supercyclique.

De plus, pour tout espace b-supercyclique réduit $M = \mathrm{Vect}(x^1, \ldots, x^b)$ avec $\displaystyle\sum_{i=\gamma+1-p}^{\gamma} m_i \leq b \leq t(p)$, si $T_p^{n_i}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{b} \lambda_j^{(n_i)} x^j\right) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{a_{\gamma+1-p}^{n_i}\lambda_j^{(n_i)}}{n_i^q} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $1 \leq j \leq b$.

Pour le cas $p = 1$, $T_p = a_\gamma\mathcal{C}_\gamma$ et par définition, T_p est m_γ-supercyclique et cette valeur est minimale. Soit $M = \mathrm{Vect}(x^1, \ldots, x^b)$ un espace b-supercyclique réduit avec $m_\gamma \leq b \leq t(1)$. Supposons également, $T_p^{n_i}\left(\sum_{j=1}^{b} \lambda_j^{(n_i)} x^j\right) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On utilise alors le Lemme 2.17 avec $h = 0$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\gamma$, $a = a_\gamma$, $m = b$, $N = t(p)$. On en déduit l'existence de $q \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_\gamma^{n_i}\lambda_j^{(n_i)}}{n_i^q} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $1 \leq j \leq b$.

Supposons l'hypothèse de récurrence vérifiée jusqu'au rang $p-1$, vérifions la au rang p. On remarque que $T_p = a_{\gamma+1-p}\mathcal{C}_{\gamma+1-p} \oplus T_{p-1}$ où $\mathcal{C}_{\gamma+1-p} = \oplus_{i=1}^{t}\mathcal{B}_i$ où les $\mathcal{B}_i$ sont des blocs de Jordan de module (ou valeur propre) 1 et de taille $\tau_i\rho_i$ où $\tau_i = 1$ ou 2 et on pose $\rho := \sum_{i=1}^{t} \rho_i$.

Supposons par l'absurde que $M = \mathrm{Vect}(x^1, \ldots, x^k)$ est un sous-espace k-supercyclique pour T_p avec $k = (\sum_{i=\gamma+1-p}^{\gamma} m_i) - 1$. On réduit la base $\{x^1, \ldots, x^k\}$ avec le Théorème 2.9, puis on écrit pour tout $1 \leq i \leq k$, $x^i = y^i \oplus z^i$. relativement à la décomposition en somme directe de T_p. Par hypothèse de récurrence, on peut dire que

$$h := \dim(\mathrm{Vect}(z^1, \ldots, z^k)) \geq \sum_{i=\gamma+2-p}^{\gamma} m_i.$$

De plus, on affirme également que $\dim(\mathrm{Vect}(y^{h+1}, \ldots, y^k)) \geq m_{\gamma+1-p}$. En effet, il suffit de montrer que $\mathrm{Vect}(y^{h+1}, \ldots, y^k)$ est supercyclique pour $a_{\gamma+1-p}\mathcal{C}_{\gamma+1-p}$. Pour cela, prenons un vecteur u du domaine de $\mathcal{C}_{\gamma+1-p}$, alors il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et k suites de nombres réels $(\lambda_1^{(n_i)})_{i\in\mathbb{N}}, \ldots, (\lambda_k^{(n_i)})_{i\in\mathbb{N}}$ telles que

$$T_p^{n_i}(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{(n_i)} x^j) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} u \oplus 0$$

car M est un sous-espace k-supercyclique pour T_p. Or par hypothèse de récurrence, pour tout $1 \le j \le h$, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $1 \le j \le h$,

$$\frac{a_{\gamma+1-(p-1)}^{n_i} \lambda_j^{(n_i)}}{n_i^q} \underset{i \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, comme $a_{\gamma+1-p} < a_{k+2-p}$, on a également :

$$a_{\gamma+1-p}^{n_i} \lambda_j^{(n_i)} P(n_i) \underset{i \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ pour tout polynôme } P. \tag{2.16}$$

On revient à présent à $T_p^{n_i}(\sum_{j=1}^k \lambda_j^{(n_i)} x^j) \underset{i \to +\infty}{\longrightarrow} u \oplus 0$ et en décrivant les premières composantes, on obtient :

$$(a_{\gamma+1-p}\mathcal{C}_{\gamma+1-p})^{n_i}(\sum_{j=1}^{h} \lambda_j^{(n_i)} y_j) + (a_{\gamma+1-p}\mathcal{C}_{\gamma+1-p})^{n_i}(\sum_{j=h+1}^{N} \lambda_j^{(n_i)} y_j) \underset{i \to +\infty}{\longrightarrow} u \tag{2.17}$$

Regardons de plus près ce qui se passe dans le premier terme de la somme ci-dessus :

$$(a_{\gamma+1-p}\mathcal{C}_{\gamma+1-p})^{n_i}(\sum_{j=1}^{h} \lambda_j^{(n_i)} y_j) = \begin{cases} a_{\gamma+1-p}^{n_i} \mathcal{A}_1^{n_i} (\sum_{j=1}^h \lambda_j^{(n_i)} \chi_1^j + \sum_{j=1}^{\rho_1 - 1} \binom{n_i}{j} \sum_{g=1}^h \lambda_g^{(n_i)} \chi_{1+j}^g) & (L_1) \\ \vdots & \vdots \\ a_{\gamma+1-p}^{n_i} \mathcal{A}_1^{n_i} \left(\sum_{j=1}^h \lambda_j^{(n_i)} \chi_{\rho_1}^j\right) & (L_{\rho_1}) \\ \vdots & \vdots \\ a_{\gamma+1-p}^{n_i} \mathcal{A}_t^{n_i} (\sum_{j=1}^h \lambda_j^{(n_i)} \chi_{r+1-\rho_t}^j + \sum_{j=1}^{\rho_t - 1} \binom{n_i}{j} \sum_{g=1}^h \lambda_g^{(n_i)} \chi_{r+1-\rho_t+j}^g) & (L_{r+1-\rho_t}) \\ \vdots & \vdots \\ a_{\gamma+1-p}^{n_i} \mathcal{A}_t^{n_i} \left(\sum_{j=1}^h \lambda_j^{(n_i)} \chi_r^j\right) & (L_r) \end{cases}$$

Comme $\mathcal{A}_j$ est une isométrie, en utilisant (2.16), on obtient que pour tout $1 \le j \le r$, $(L_j) \underset{i \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi le premier terme de (2.17) converge vers 0. D'où,

$$(a_{\gamma+1-p}\mathcal{C}_{\gamma+1-p})^{n_i}(\sum_{j=h+1}^{k} \lambda_j^{(n_i)} y_j) \underset{i \to +\infty}{\longrightarrow} u.$$

Ainsi, $\mathrm{Vect}(y^{h+1}, \dots, y^k)$ est supercyclique pour $a_{\gamma+1-p}\mathcal{C}_{\gamma+1-p}$ et par conséquent

$$\dim(\mathrm{Vect}(y^{h+1} \dots, y^k)) \ge m_{\gamma+1-p}.$$

On a donc

$$h := \dim(\mathrm{Vect}(z^1, \dots, z^k)) \ge \sum_{i=\gamma+2-p}^{\gamma} m_i \text{ et } \dim(\mathrm{Vect}(y^{h+1}, \dots, y^k)) \ge m_{\gamma+1-p}.$$

Par le procédé de réduction de base du Théorème 2.9, on sait que $x^j = y^j \oplus 0$ pour tout $h+1 \le j \le k$, d'où l'on peut déduire que

$$k = \dim(\mathrm{Vect}(x^1, \dots, x^k)) \ge \sum_{i=\gamma+2-p}^{\gamma} m_i + m_{\gamma+1-p} = k+1.$$

Cette contradiction montre que T_p n'est pas $\big((\sum_{i=\gamma+1-p}^{\gamma} m_i) - 1\big)$-supercyclique.

Montrons maintenant la deuxième partie de l'hypothèse de récurrence. Soit $M = \mathrm{Vect}(x^1, \ldots, x^b)$ un espace b-supercyclique réduit avec $\sum_{i=\gamma+1-p}^{\gamma} m_i \leq b \leq t(p)$. Supposons également,

$$T_p^{n_i}(\sum_{j=1}^{b} \lambda_j^{(n_i)} x^j) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour tout $1 \leq i \leq b$, on décompose $x^i = y^i \oplus z^i$ selon la décomposition en somme directe de $T_p = a_{\gamma+1-p}\mathcal{C}_{\gamma+1-p} \oplus T_{p-1}$. On utilise encore une fois le Lemme 2.17 ($a_{\gamma+1-p} = a$, $a_{\gamma+2-p} = b$, $b = m$, $t(p) - t(p-1) = N$ h = nombre de vecteurs qui sont non-nuls parmi $z^1, \ldots, z^b$, $x^i = y^i$, γ =nombre de blocs de Jordan dans $\mathcal{C}_{\gamma+1-p}$, $\mathcal{C}_{\gamma+1-p} = \mathcal{C}$, $a_{\gamma+1-p}\mathcal{C}_{\gamma+1-p} = T$) et l'on obtient directement la fin de l'hypothèse de récurrence c'est-à-dire qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $1 \leq j \leq b$:

$$\frac{a_{\gamma+1-p}^{n_i}\lambda_j^{(n_i)}}{(n_{i)}^{q}} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci achève la preuve de la proposition.

$\square$

Nous sommes maintenant prêts avec les Théorèmes 2.19 et 2.20 à donner des résultats généraux de supercyclicité sur $\mathbb{R}^N$. Ce théorème donne un corollaire qui généralise le Théorème 1.13 de Herzog sur les opérateurs supercycliques sur $\mathbb{R}^N$.

Corollaire 2.21. *Soit $N \geq 2$. Soit T un opérateur sur $\mathbb{R}^N$, alors T n'est pas $(\rho - 1)$-supercyclique.*

Preuve :
Sans perte de généralité, quitte à prendre un multiple de T et à opérer une réduction de Jordan en réordonnant les blocs, on peut supposer que la suite des modules (valeurs propres) de chaque bloc de Jordan est de la forme suivante : $|a_1| \leq \ldots \leq |a_\gamma| \leq 1$. On peut ensuite regrouper les blocs de Jordan de même module en sous matrices $S_1, \ldots, S_t$ qui forment une décomposition en somme directe de T. Notons $\rho^{(j)}$ la taille relative de la matrice S_j pour $j = 1, \ldots, t$. En utilisant le Théorème 2.19 sur chaque sous matrice, on obtient que $\rho^{(j)}$ est une borne inférieure de l'indice de supercyclicité de chaque sous matrice S_j. Puis on regroupe ces valeurs grâce au Théorème 2.20. Ceci implique que $\big(\sum_{j=1}^{t} \rho^{(j)}\big)$ est une borne inférieure de l'indice de supercyclicité de T. Enfin, par définition de ρ et de $\rho^{(j)}$, il est clair que $\big(\sum_{j=1}^{t} \rho^{(j)}\big) = \rho$. On a donc prouvé le corollaire.

$\square$

On déduit de ce corollaire un second corollaire dont la conclusion est encore plus générale :

Corollaire 2.22. *Soit $N \geq 2$. Il n'existe pas d'opérateur $(\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor - 1)$-supercyclique sur $\mathbb{R}^N$. De plus, cette valeur est optimale : il existe toujours un opérateur $(\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor)$-supercyclique sur $\mathbb{R}^N$.*

Preuve :

La non-existence est une conséquence directe du Corollaire 2.21. En effet, si N est pair, alors la plus petite valeur que peut prendre la taille relative d'une matrice de taille N est $\frac{N}{2}$. D'autre part, si N est impair alors cette valeur minimale est $\frac{N+1}{2}$. Ainsi, la taille relative d'une matrice de taille N ne peut être inférieure à $\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor$. L'optimalité est donnée par l'Exemple 2.4.

$\square$

Remarque 2.23. De plus, en utilisant les résultats précédents et en faisant quelques calculs élémentaires, on peut donner une caractérisation des opérateurs n-supercycliques sur $\mathbb{R}^N$ pour $N \leq 5$. On ne peut pas poursuivre cette caractérisation dans connaitre l'indice de supercyclicité d'un bloc de Jordan réel de $\mathbb{R}^6$. L'étude de ce type d'opérateur demande d'améliorer les techniques précédentes car l'angle de la rotation joue un rôle prépondérant dans ce cas.

Question. Existe-t-il un théorème du même type que le Théorème 2.20 pour une somme directe de blocs de Jordan de module 1 ?

Question. Existe-t-il un bloc de Jordan réel sur $\mathbb{R}^{2N}$ qui est $(2N-2)$-supercyclique ? Si oui, quel est le meilleur indice de supercyclicité ?

2.4 Étude de la forte n-supercyclicité

On s'intéresse à l'existence d'opérateurs fortement n-supercycliques sur un espace de dimension finie E. Évidemment, seul le cas $n < \dim(E)$ est intéressant. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}^N$, on sait déjà que c'est impossible. En effet, Bourdon, Feldman et Shapiro ont montré dans [13] qu'il n'existe pas d'opérateurs n-supercycliques sur $\mathbb{C}^N$ pour $n < N$. A fortiori, il n'existe pas d'opérateur fortement n-supercyclique sur $\mathbb{C}^N$ pour $n < N$. Par contre dans le cas où le corps sous-jacent est $\mathbb{R}$, on a vu dans la partie précédente que l'on ne pouvait pas conclure de la même façon puisqu'il existe des opérateurs n-supercycliques sur $\mathbb{R}^N$ pour $\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor \leq n \leq N$. La question de l'existence d'opérateurs fortement n-supercycliques sur $\mathbb{R}^N$ est donc toujours ouverte. Nous nous proposons de répondre à cette question par la négative. La première chose à remarquer est que l'on peut se limiter à la moitié des valeurs de n.

Proposition 2.24. *Soit $n < N$. Un opérateur T sur $\mathbb{R}^N$ est fortement n-supercyclique si et seulement si $(T^{-1})^*$ est fortement $(N-n)$-supercyclique et les T-espaces fortement n-supercycliques sont les orthogonaux des $(T^{-1})^*$-espaces fortement $(N-n)$-supercycliques.*

Cette proposition répond partiellement à la question de l'existence d'opérateurs fortement n-supercycliques sur $\mathbb{R}^N$ et en combinant ceci et le Corollaire 2.22, on déduit directement le corollaire suivant :

Corollaire 2.25. *Il n'existe pas d'opérateur fortement n-supercyclique sur $\mathbb{R}^{2N+1}$ pour $N \geq 1$ et pour tout $1 \leq n < 2N+1$.*
Il n'existe pas d'opérateur fortement n-supercyclique sur $\mathbb{R}^{2N}$ pour $N \geq 2$ et pour tout $1 \leq n < 2N$, $n \neq N$.

Ce corollaire nous donne toute une classe d'exemples d'opérateurs n-supercycliques mais pas fortement n-supercycliques et répond à une question de Shkarin par la négative en montrant que la forte n-supercyclicité n'est pas équivalente à la n-supercyclicité.

Contre-Exemple 2.26. Un opérateur 2-supercyclique mais pas fortement 2-supercyclique : Une rotation d'axe une droite et d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}^3$ est 2-supercyclique mais n'est pas fortement 2-supercyclique.

Remarque 2.27. Un opérateur T sur $\mathbb{R}^N$ qui est fortement n-supercyclique pour $n \leq N$ est bijectif. En effet, il est d'image dense et donc bijectif en dimension finie.

Nous allons maintenant prouver la Proposition 2.24 et l'on aura besoin des deux résultats suivants. Le premier lemme nous permet de traduire la densité d'un ensemble en termes de densité de l'union des images des itérés de $(T^{-1})^*$.

Lemme 2.28. *Soit M un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ et T un automorphisme de $\mathbb{R}^N$. Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $(T^i(M))^\perp = (T^{-i})^*(M^\perp)$.*

Preuve :

Il est clair qu'il suffit de montrer que $(T(M))^\perp = (T^{-1})^*(M^\perp)$, ce qui revient à montrer que $T^*((T(M))^\perp) = M^\perp$. Soit $f \in T(M)^\perp$ et soit $x \in M$ alors

$$\langle T^* f, x\rangle = \langle f, Tx\rangle = 0$$

d'où $T^* f \in L^\perp$.
On utilise ensuite le fait que ces deux espaces sont de même dimension pour conclure qu'ils sont égaux.

□

Le lemme suivant est la clé pour transférer des propriétés de densité de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}^N)$ à $\mathbb{P}_{N-n}(\mathbb{R}^N)$. On en trouve une preuve dans [41].

Lemme 2.29. *Soit $\Phi : \mathbb{P}_n(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{P}_{N-n}(\mathbb{R}^N)$ l'application définie par $\Phi(M) = M^\perp$. Alors Φ est un homéomorphisme.*

Grâce à ces deux lemmes, il nous est maintenant possible de prouver la proposition :

Preuve de la proposition 2.24 :

D'après le Lemme 2.28 et le Lemme 2.29, si M est un T-espace fortement n-supercyclique, $\Phi(\{T^i(M)\}_{i\in\mathbb{N}}) = \{(T^{-i})^*(M^\perp)\}_{i\in\mathbb{N}}$ est dense dans $\mathbb{P}_{N-n}(\mathbb{R}^N)$. Ceci prouve la proposition.

□

2.4.1 Opérateurs fortement 2-supercycliques sur $\mathbb{R}^4$

Nous souhaitons montrer qu'il n'existe pas d'opérateurs fortement n-supercycliques sur $\mathbb{R}^N$ pour $N \geq 3$ et $1 \leq n < N$. Le problème est déjà résolu avec le Corollaire 2.25 pour le cas où N est impair, il nous reste donc juste à considérer le cas où N est pair. La plus petite dimension pour laquelle la question est encore ouverte est donc la dimension 4. Dans l'objectif de raisonner par récurrence pour le cas général, l'étape cruciale est donc l'étude des opérateurs fortement 2-supercycliques sur $\mathbb{R}^4$. Nous allons commencer par montrer qu'une somme directe de deux rotations n'est pas fortement 2-supercyclique sur $\mathbb{R}^4$ et pour cela, nous allons caractériser les sous-espaces 2-supercycliques pour un tel opérateur puis montrer que ces sous-espaces ne sont pas fortement 2-supercycliques :

Proposition 2.30. *Soit R une somme directe de deux rotations :*

$$R = \left(\begin{array}{c|c} R_{\theta_1} & 0 \\ \hline 0 & R_{\theta_2} \end{array}\right) \text{ avec } (\theta_1, \theta_2, \pi) \text{ linéairement indépendants sur } \mathbb{Q}.$$

Alors :

$$\mathcal{ES}_2(R) = \left\{ Vect\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ay_1 \\ ay_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} bx_1 \\ bx_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right), \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, ab \neq 1 \right\}.$$

Preuve :

On va procéder par double inclusion.

Commençons par choisir $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ay_1 \\ ay_2 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} bx_1 \\ bx_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ qui vérifient les conditions de l'énoncé. On va montrer que l'espace vectoriel engendré par ces deux vecteurs est un sous-espace 2-supercyclique pour R. Tout d'abord, on remarque que $x - ay$ est non-nul mais ses troisième et quatrième composantes sont nulles et de même $y - bx$ est aussi non-nul mais ses première et deuxième composantes sont nulles.

Soient U, V deux ouverts non-vides de $\mathbb{R}^2$. Par hypothèse, comme θ_1, θ_2, π sont libres sur $\mathbb{Q}$, il existe $i \in \mathbb{N}$ et $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$c_1(1 - ab)R^i_{\theta_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in U \text{ et } c_2(1 - ab)R^i_{\theta_2} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V.$$

Donc $R^i(c_1(x - ay) + c_2(-bx + y)) \in U \times V$ ainsi, $\mathrm{Vect}(x, y)$ est 2-supercyclique pour R.

Réciproquement, supposons qu'il existe un sous-espace vectoriel M de dimension 2 que l'on va noter $M = \mathrm{Vect}\left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \right)$ et qui est un sous-espace 2-supercyclique pour R et qui ne vérifie pas les conditions que nous avons énoncées. Alors on a deux cas possibles : soit la famille $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est libre, soit on peut supposer que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On définit l'ensemble $U_1 := \{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| < 1\}$ et l'ensemble $U_2 := \{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| > t\}$ pour un certain réel positif t que l'on fixera plus tard. Comme M est 2-supercyclique pour R, $\{R^i(\lambda x + \mu y)\}_{i \in \mathbb{N}, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2}$ est dense dans $\mathbb{R}^4$. Par conséquent, il existe $i \in \mathbb{N}$ et

$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$R^i(\lambda x + \mu y) \in U_1 \times U_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \lambda \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in R_{\theta_1}^{-i}(U_1) \times R_{\theta_2}^{-i}(U_2) = U_1 \times U_2.$$

À présent, posons

$$\Gamma_1 := \left\{ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in U_1. \right\}$$

Comme U_1 est borné, et comme la famille $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\}$ est supposée libre ou alors $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient que Γ_1 est également borné. Si l'on note également

$$\Omega := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, (\lambda, \mu) \in \Gamma_1 \right\},$$

il est facile de voir que cet ensemble est aussi borné puisque Γ_1 l'est. Choisissons alors t de façon à ce qu'il majore Ω sur $\mathbb{R}^2$ (pour une norme quelconque $\|.\|$ de $\mathbb{R}^2$). On en déduit que $U_2 \cap \Omega = \emptyset$, ce qui est absurde. Donc M vérifie les conditions de l'énoncé.

□

Grâce à la caractérisation des espaces 2-supercycliques pour une somme directe de deux rotations, on peut montrer que ces espaces ne sont pas fortement 2-supercycliques pour R.

Corollaire 2.31. *R n'est pas fortement 2-supercyclique sur $\mathbb{R}^4$.*

Preuve :

Supposons que R soit fortement 2-supercyclique sur $\mathbb{R}^4$, alors un R-espace fortement 2-supercyclique est de la forme donnée par la Proposition 2.30. Donc si $x, y \in \mathbb{R}^4$ engendrent un sous-espace fortement 2-supercyclique pour R, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on exprime :

$$R^i(\lambda x + \mu y) = \begin{pmatrix} (\lambda + b\mu) R_{\theta_1}^i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ (\lambda a + \mu) R_{\theta_2}^i \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Comme x et y engendrent un sous-espace fortement 2-supercyclique pour R, alors la Proposition 1.42 implique qu'en particulier pour tous ouverts non-vides $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^2$, il existe $i \in \mathbb{N}$ et quatre nombres réels λ, μ, α et β tels que :

$$(\lambda + b\mu) R_{\theta_1}^i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in U_1 \quad \text{et} \quad (\alpha + b\beta) R_{\theta_1}^i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in U_2.$$

Or en choisissant les ouverts U_1 et U_2 de façon à ce qu'il n'existe aucune droite vectorielle qui intersecte les deux à la fois, il est clair que ceci est impossible. R ne peut donc pas être fortement 2-supercyclique.

$\square$

Nous allons aussi montrer que deux autres classes d'opérateurs ne sont pas fortement 2-supercycliques $\mathbb{R}^4$.

Proposition 2.32. *$\left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$ et $R = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ où $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$, $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, ne sont pas fortement 2-supercycliques.*

Preuve :

Il est clair que l'on peut supposer $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ car sinon R n'est pas à image dense.

Si $R = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$ alors R n'est pas fortement 2-supercyclique par la Proposition 2.5.

Si $R = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$, supposons par l'absurde que R soit fortement 2-supercyclique. Quitte à multiplier R par un réel et à échanger l'ordre des sous-matrices, on remarque que l'on peut supposer $R = \left(\begin{array}{c|c} R_\theta & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ avec $C = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ et $c^2 + d^2 \leq 1$. De plus, d'après le Corollaire 2.31, il suffit de considérer le cas où $c^2 + d^2 < 1$. Soit $M = \mathrm{Vect}(x, y)$ un espace R-fortement 2-supercyclique. Cette fois encore nous n'allons pas raisonner sur la forme des générateurs mais de la même façon que dans la Proposition 2.30. Par la Proposition 1.42, comme M est fortement 2-supercyclique pour R, pour tous ouverts non-vides $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^2$, il existe $i \in \mathbb{N}$ et $\lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} R^i(\lambda x + \mu y) \in U_1 \times U_2 \\ R^i(\alpha x + \beta y) \in V_1 \times V_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda R_\theta^i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mu R_\theta^i \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in U_1 \\ \alpha R_\theta^i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \beta R_\theta^i \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V_1 \\ \lambda C^i \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \mu C^i \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in U_2 \\ \alpha C^i \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \beta C^i \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in V_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R_\theta^{-i}(U_1) \\ \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R_\theta^{-i}(V_1) \\ \lambda \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in C^{-i}(U_2) \\ \alpha \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in C^{-i}(V_2) \end{cases}$$

De cette expression, on déduit que $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right\}$ est libre car il est clair que si l'on choisit U_1 et V_1 de façon à ce qu'il n'existe pas de droite vectorielle qui intersecte U_1 et

V_1, alors l'équation ci-dessus ne peut être vérifiée. Donc la famille $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right\}$ est libre.

Posons ensuite $U_1 = \{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| < 1\}$ et $U_2 = \{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| > t\}$ pour un certain nombre réel positif t que nous fixerons plus tard.

On définit également

$$\Gamma = \left\{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in U_1\right\}.$$

Du fait que la famille $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right\}$ est libre et que U_1 est borné, on déduit que Γ est borné dans $\mathbb{R}^2$ par continuité des projections. Notons enfin

$$\Omega = \left\{\lambda \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, (\lambda, \mu) \in \Gamma\right\}.$$

Il est encore clair que cet ensemble est borné puisque Γ l'est. On choisit alors t comme étant un majorant de cette borne. Remarquons d'autre part que

$$C^{-1} = \frac{1}{c^2 + d^2} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{c^2 + d^2}} R_\varphi$$

et comme $c^2 + d^2 < 1$, alors $C^{-i}(U_2) \subseteq U_2$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Ainsi, $\Omega \cap \cup_{i\in\mathbb{N}} C^{-i}(U_2) = \emptyset$, ce qui contredit la 2-supercyclicité de R.

□

2.4.2 Résultat Général

Nous allons raisonner par récurrence sur la dimension de l'espace pour montrer qu'il n'y a pas d'opérateurs fortement n-supercycliques sur $\mathbb{R}^N$ pour $N \geq 3$ et $n < N$. Pour cela la proposition suivante inspirée de Bourdon, Feldman, Shapiro [13] nous sera utile :

Proposition 2.33. *Soit X un espace vectoriel topologique de Hausdorff. Soit $T : X \to X$ un opérateur continu et K un sous-espace fermé invariant par T. Si T est fortement n-supercyclique, alors l'application quotient $T_K : \frac{X}{K} \to \frac{X}{K}$ définie par $T_K(x+K) := T(x)+K$ est elle-aussi fortement n-supercyclique.*

La preuve consiste en une simple vérification en utilisant la Proposition 1.42.

Théorème 2.34. *Pour $N \geq 3$, il n'existe pas d'opérateurs fortement n-supercycliques sur $\mathbb{R}^N$ pour $1 \leq n < N$.*

Preuve :

Nous avons déjà montré avec le Corollaire 2.25 et le résultat de Herzog [31] qu'il n'y a pas d'opérateurs fortement n-supercycliques sur $\mathbb{R}^3$ pour $n = 1$ ou $n = 2$.

Soit donc $N \geq 4$. On souhaite montrer qu'il n'existe pas d'opérateurs fortement n-supercycliques sur $\mathbb{R}^N$ pour $n < N$. Par le Corollaire 2.25, on peut supposer que $N \geq 4$

est pair et que $n = \frac{N}{2}$. Soit T un opérateur sur $\mathbb{R}^N$. En utilisant la réduction de Jordan, on peut supposer que :

$$R = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{J_q} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{\mathcal{J}_1} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\mathcal{J}_r} \end{pmatrix}$$

où les blocs de Jordan J_i sont des blocs classiques :

$$J_i = \begin{pmatrix} \mu_i & \mu_i & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \cdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \mu_i \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_i \end{pmatrix}$$

et les blocs $\mathcal{J}_i$ sont des blocs de Jordan réels :

$$\mathcal{J}_i = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_i & \mathcal{A}_i & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \cdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \mathcal{A}_i \\ 0 & \cdots & 0 & \mathcal{A}_i \end{pmatrix}.$$

Par l'absurde, supposons que M est un sous-espace fortement $\frac{N}{2}$-supercyclique pour R. Il se présente alors deux cas de figure, soit $q = 0$, soit $q \neq 0$.

Dans le cas où $q = 0$, alors le sous-espace $K = \mathrm{Vect}((1, 0, \ldots, 0))$ est invariant par R. On quotiente alors $\mathbb{R}^N$ par K et l'on applique la Proposition 2.33. On obtient que l'opérateur R_K est fortement $\frac{N}{2}$-supercyclique sur $\mathbb{R}^{N-1}$. De plus, $1 \leq \frac{N}{2} < N - 1$ puisque $N \geq 4$. Mais ceci contredit le Corollaire 2.25 puisque $N - 1$ est impair.

Dans le second cas, c'est-à-dire $q \neq 0$, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $N \geq 6$. En effet, si $N = 4$, alors le Corollaire 2.31 et la Proposition 2.32 impliquent que R n'est pas fortement 2-supercyclique.
Remarquons qu'ici le sous-espace $K = \mathrm{Vect}((1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0))$ est invariant par R. On considère alors le quotient de $\mathbb{R}^N$ par K. Là encore la Proposition 2.33 implique que R_K est fortement $\frac{N}{2}$-supercyclique sur $\mathbb{R}^{N-2}$. Mais comme $N \geq 6$, on remarque aussi que $1 \leq \frac{N}{2} \neq \frac{N-2}{2} = \frac{N}{2} - 1$. Or ceci contredit encore le Corollaire 2.25. Il n'existe donc pas d'opérateurs fortement n-supercycliques sur $\mathbb{R}^N$ pour $N \geq 3$ et $1 \leq n < N$.

□

3 Forte n-supercyclicité

Dans les sections 3.1 et 3.2, les espaces de Banach seront toujours définis sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

3.1 Quelques propriétés spectrales

Comme nous l'avons rappelé avec les Propositions 1.6 et 1.18, il est bien connu pour les opérateurs hypercycliques et supercycliques que le spectre ponctuel de leur adjoint $\sigma_p(T^*)$ est plutôt restreint puisqu'il ne comporte au plus qu'un élément dans le cas d'un opérateur supercyclique et aucun pour les hypercycliques. Feldman a généralisé ce comportement aux opérateurs n-supercycliques comme nous l'avons remarqué avec le Théorème 1.26. Or comme les opérateurs fortement n-supercycliques forment une sous-classe des opérateurs n-supercyclique, on déduit que tout adjoint d'un opérateur fortement n-supercyclique compte au plus n valeurs propres. Cependant la preuve de ce résultat est beaucoup plus simple dans ce cas particulier.

Théorème 3.1. *Soit T un opérateur fortement n-supercyclique sur un espace de Banach X et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de T^* de multiplicité respective $m_1, \ldots, m_p$. Alors $m_1 + \ldots + m_p \leq n$.*

Preuve :

Notons $k = m_1 + \ldots + m_p$ et $\{x_1^*, \ldots, x_k^*\}$ une famille libre de vecteurs propres de T^*. Posons $Y = \cap_{i=1}^k \ker(x_i^*)$ et choisissons F un supplémentaire de Y dans X de dimension k. On remarque alors que Y est stable par T. En effet, si $x_i^*(x) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, alors $0 = T^* x_i^*(x) = x_i^*(Tx)$. Donc $T(x) \in \cap_{i=1}^k \ker(x_i^*) = Y$. Par conséquent, si l'on décompose l'espace X de la façon suivante $X = F \oplus Y$, alors T admet pour matrice : $\begin{pmatrix} S & 0 \\ A & B \end{pmatrix}$.

De cette décomposition, on déduit que S est nécessairement fortement n-supercyclique sur F qui est de dimension k. Or d'après le résultat du Théorème 2.34, ceci n'est possible que si la dimension de F est plus petite que n.

$\square$

En prenant le problème à contre-pied, on peut se demander quelles sont les libertés que l'on a avec ces valeurs propres. On peut se demander par exemple si pour tout choix de n nombres complexes non-nuls, on peut trouver un opérateur fortement n-supercyclique dont les valeurs propres de l'opérateur adjoint sont exactement ces nombres complexes. Le résultat suivant répond à cette question par l'affirmative.

Théorème 3.2. *Soit X un espace de Banach. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{C}^*$ et $m_1, \ldots, m_p \in \mathbb{N}^*$ et T un opérateur linéaire borné sur X. On pose $n = \sum_{i=1}^{p} m_i$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $S := \oplus_{i=1}^{m_1} \lambda_1 Id \oplus \cdots \oplus_{i=1}^{m_p} \lambda_p Id \oplus T$ est fortement n-supercyclique sur $\mathbb{C}^n \oplus X$;

(ii) $\oplus_{i=1}^{m_1} \frac{T}{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus_{i=1}^{m_p} \frac{T}{\lambda_p}$ est hypercyclique.

De plus, dans ces conditions, $\sigma_p(S^*) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, λ_i est de multiplicité m_i.

Preuve :

Pour des raisons pratiques, nous allons noter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les “futures“ valeurs propres de S^* comptées avec multiplicité et $R = \frac{T}{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \frac{T}{\lambda_n}$ hypercyclique par hypothèse. En supposant l'équivalence prouvée, il est clair par définition de S que $\sigma_p(S^*) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ puisque $\sigma_p(T^*) = \emptyset$ si R est hypercyclique grâce à la Proposition 1.6. Il est clair également que S n'est pas fortement k-supercyclique pour $k < n$ d'après le Théorème 3.1.

On commence par montrer (ii)⇒(i).

Soit $(y_1, \ldots, y_n) \in X^n$ un vecteur hypercyclique pour R. Soit $\{(e_{i,1}, \ldots, e_{i,n})\}_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, c'est-à-dire $e_{i,i} = 1$ et $e_{i,j} = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, et pour tout $j \neq i$. Posons ensuite $M = \text{Vect}\{(e_{i,1}, \ldots, e_{i,n}, y_i),\ 1 \leq i \leq n\}$. Pour vérifier que S est fortement n-supercyclique, il suffit de vérifier que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{S^k(M) \times \cdots \times S^k(M)}_{n \text{ fois}}$ est dense dans $(\mathbb{C}^n \oplus X)^n$. Il suffit encore de montrer que

$$\bigcup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ (\mu_{i,j})_{i,j} \in M_n(\mathbb{C})}} \sum_{i=1}^{n} \mu_{1,i}(\oplus_{j=1}^{n} \lambda_j^k e_{i,j} \oplus T^k y_i) \oplus \cdots \oplus \sum_{i=1}^{n} \mu_{n,i}(\oplus_{j=1}^{n} \lambda_j^k e_{i,j} \oplus T^k y_i)$$

est dense dans $(\mathbb{C}^n \oplus X)^n$.

Soit $z = (z_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n+1}} \in (\mathbb{C}^n \oplus X)^n$ et $\varepsilon > 0$. Nous allons trouver un entier k et une matrice $(\mu_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ qui permettent d'approcher z à ε près. On remarque facilement que si l'on prend $\mu_{i,j} = \frac{z_{i,j}}{\lambda_j^k}$ pour tous $i, j = 1, \ldots, n$ alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_{1,i}(\oplus_{j=1}^{n} \lambda_j^k e_{i,j}) \oplus \cdots \oplus \sum_{i=1}^{n} \mu_{n,i}(\oplus_{j=1}^{n} \lambda_j^k e_{i,j}) = ((z_{1,1}, \ldots, z_{1,n}), \ldots, (z_{n,1}, \ldots, z_{n,n})).$$

On se trouve face à deux alternatives, soit $\det((z_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}) \neq 0$ et dans ce cas, on pose $a_{i,j} = z_{i,j}$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$, soit $\det((z_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}) = 0$. Dans ce dernier cas, comme $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$ et que $\{(e_{i,1}, \ldots, e_{i,n})\}_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}^n$, on peut trouver $A := (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i,j}}{\lambda_j^k} (\oplus_{j=1}^{n} \lambda_j^k e_{i,j}) \oplus \cdots \oplus \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i,j}}{\lambda_j^k} (\oplus_{j=1}^{n} \lambda_j^k e_{i,j}) - ((z_{1,1}, \ldots, z_{1,n}), \ldots, ((z_{n,1}, \ldots, z_{n,n})) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On va maintenant dans les deux cas poser $\mu_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{\lambda_j^k}$. Il nous reste alors à trouver $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left\| \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1,i} \left(\frac{T}{\lambda_i}\right)^k y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{n,i} \left(\frac{T}{\lambda_i}\right)^k y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_{1,n+1} \\ \vdots \\ z_{n,n+1} \end{pmatrix} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On utilise la multiplication matricielle pour remarquer que ceci revient encore à trouver $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left\| A \begin{pmatrix} \left(\frac{T}{\lambda_1}\right)^k y_1 \\ \vdots \\ \left(\frac{T}{\lambda_n}\right)^k y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_{1,n+1} \\ \vdots \\ z_{n,n+1} \end{pmatrix} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Et donc, il suffit de trouver $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left\| \begin{pmatrix} \left(\frac{T}{\lambda_1}\right)^k y_1 \\ \vdots \\ \left(\frac{T}{\lambda_n}\right)^k y_n \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} z_{1,n+1} \\ \vdots \\ z_{n,n+1} \end{pmatrix} \right\| < \frac{\varepsilon}{2\|A\|}.$$

Or un tel $k \in \mathbb{N}$ existe par définition car $(y_1, \ldots, y_n)$ est un vecteur hypercyclique pour R. On a donc trouvé $k \in \mathbb{N}$ et $(\mu_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ tels que :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \mu_{1,i}(\oplus_{j=1}^{n} \lambda_j^k e_{i,j} \oplus T^k y_i) \oplus \cdots \oplus \sum_{i=1}^{n} \mu_{n,i}(\oplus_{j=1}^{n} \lambda_j^k e_{i,j} \oplus T^k y_i) - (z_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Il reste à montrer le sens inverse (i)$\Rightarrow$(ii).
Soit M un sous-espace fortement n-supercyclique pour S et notons M_0 sa projection sur $\mathbb{C}^n$. Ainsi, M_0 est un sous-espace fortement $\dim(M_0)$-supercyclique pour $S_{|\mathbb{C}^n}$. Or d'après le Théorème 2.34, $\dim(M_0) = n$, c'est-à-dire $M_0 = \mathbb{C}^n$. On peut donc choisir une base de M de la forme suivante : $M = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ x_2 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ x_n \end{pmatrix} \right)$.

Nous voulons montrer que R est hypercyclique. Soit $(z_1, \cdots, z_n) \in X^n$. Comme S est fortement n-supercyclique, on peut trouver une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et des complexes $(\mu_{i,j}^{(n_k)})_{1 \leq i,j \leq n}$ tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{cases} \mu_{i,i}^{(n_k)} \lambda_i^{n_k} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 1, \\ \mu_{i,j}^{(n_k)} \lambda_j^{n_k} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ pour tout } j \neq i, \\ z_i^{(n_k)} := \sum_{j=1}^{n} \mu_{i,j}^{(n_k)} T^{n_k} x_j \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} z_i. \end{cases}$$

Posons alors,

$$A^{(n_k)} = \begin{pmatrix} \mu_{1,1}^{(n_k)} \lambda_1^{n_k} & \cdots & \mu_{n,1}^{(n_k)} \lambda_n^{n_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{1,n}^{(n_k)} \lambda_1^{n_k} & \cdots & \mu_{n,n}^{(n_k)} \lambda_n^{n_k} \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $A^{(n_k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} Id$. On peut donc supposer que $A^{(n_k)}$ est inversible et de plus, $\left(A^{(n_k)}\right)^{-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} Id$ également. Il nous suffit maintenant de remarquer que

$$A^{(n_k)}\begin{pmatrix} \frac{T^{n_k}x_1}{\lambda_1^{n_k}} \\ \vdots \\ \frac{T^{n_k}x_n}{\lambda_n^{n_k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^{n_k} \\ \vdots \\ z_n^{n_k} \end{pmatrix}$$

ainsi

$$\begin{pmatrix} \frac{T^{n_k}x_1}{\lambda_1^{n_k}} \\ \vdots \\ \frac{T^{n_k}x_n}{\lambda_n^{n_k}} \end{pmatrix} = \left(A^{(n_k)}\right)^{-1}\begin{pmatrix} z_1^{(n_k)} \\ \vdots \\ z_n^{(n_k)} \end{pmatrix} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Et donc R est hypercyclique.

□

On vient de trouver un outil qui a deux grandes utilités, la première étant de donner une méthode de construction d'opérateurs fortement n-supercycliques qui ne sont pas fortement m-supercycliques pour $m < n$ et la deuxième étant que l'on peut en plus choisir le spectre ponctuel de son adjoint. Nous allons donner maintenant notre premier exemple d'opérateur fortement n-supercyclique qui n'est pas fortement m-supercyclique pour $m < n$.

Exemple 3.3. Soit B l'opérateur de décalage à gauche sur $\ell^2(\mathbb{N})$ défini par $B(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (a_1, a_2, \ldots)$. Soient également $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{D}$. Alors l'opérateur défini sur $\mathbb{C}^n \oplus \ell^2(\mathbb{N})$ par $T = \lambda_1 Id \oplus \cdots \oplus \lambda_n Id \oplus B$ est fortement n-supercyclique mais n'est pas fortement m-supercyclique pour $m < n$. En effet, on sait que $\frac{B}{\lambda}$ vérifie le critère d'hypercyclicité pour la suite complète des entiers naturels si et seulement si $|\lambda| < 1$ par la Proposition 1.9. De cette façon, $\frac{B}{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \frac{B}{\lambda_n}$ vérifie également le critère d'hypercyclicité et donc T est fortement n-supercyclique. De plus, il est clair que T ne peut pas être fortement m-supercyclique pour $m < n$ car sinon la restriction de T à $\mathbb{C}^n$ serait elle aussi fortement m-supercyclique et ceci contredirait le Théorème 2.34.

Nous savons que les opérateurs fortement n-supercycliques sont en particulier n-supercycliques et héritent ainsi des propriétés spectrales de ces derniers, le Théorème 1.24 s'applique donc également à ces opérateurs. Ainsi pour tout opérateur fortement n-supercyclique, il existe au plus n cercles qui coupent chaque composante du spectre de celui-ci. Ceci a été démontré par Feldman [19] pour les opérateurs n-supercycliques mais il a aussi exhibé des exemples extrêmes où le spectre est effectivement coupé par, au minimum, n cercles distincts centrés en 0 . Le théorème suivant montre qu'une amélioration de ce théorème est possible pour le cas des opérateurs fortement n-supercycliques et qu'à quelques points près, un unique cercle suffit à couper toutes les autres composantes du spectre.

Théorème 3.4. *Soit X un espace de Banach complexe et T un opérateur fortement n-supercyclique sur X.*
Alors on peut décomposer $X = F \oplus X_0$, avec F et X_0 T-stables, F de dimension finie inférieure ou égale à n. D'autre part, il existe $R \geq 0$ tel que le cercle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$

intersecte chaque composante du spectre de $T_0 := T_{|X_0}$. *De plus, dans le cas particulier où* $n = 2$, *on obtient que* $T_{|_F}$ *est diagonal.*

Preuve :

Évidemment, s'il existe un cercle qui intersecte chaque composante du spectre de T, c'est fini. Sinon, il existe $R \geq 0$ et deux composantes C_1, C_2 de $\sigma(T)$ telles que $C_1 \subset B(0,R)$ et $C_2 \subset \mathbb{C} \setminus \overline{B(0,R)}$. On peut supposer que $R = 1$. Ceci nous permet alors de décomposer $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3$ avec $\sigma_1 \subset \mathbb{D}$, $\sigma_2 \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ et $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ fermés deux à deux disjoints. On peut alors écrire $T = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$ sur $X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$ avec $\sigma(T_i) = \sigma_i$ pour $i = 1, 2, 3$ grâce au théorème de décomposition de Riesz, on pourra se reporter à [26].

Nous allons commencer par montrer que la dimension de X_1 est forcément inférieure ou égale à $n-1$. Supposons donc par l'absurde que $\dim(X_1) > n-1$, alors on peut choisir $(u_1, \dots, u_n) \in X_1^n$ de sorte que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\|z - u_i\| > 1$ pour tout $z \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n)$. Soit $L = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}\right)$ un sous-espace fortement n-supercyclique pour T. On peut alors trouver une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une matrice $A_k \in M_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$A_k \begin{pmatrix} T_1^{n_k} x_1 \\ \vdots \\ T_1^{n_k} x_n \end{pmatrix} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ et } A_k \begin{pmatrix} T_2^{n_k} y_1 \\ \vdots \\ T_2^{n_k} y_n \end{pmatrix} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par densité de $GL_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$, on peut supposer que A_k est inversible pour tout $k \in \mathbb{N}$. On pose ensuite :

$$A_k \begin{pmatrix} T_1^{n_k} x_1 \\ \vdots \\ T_1^{n_k} x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,k} \\ \vdots \\ u_{n,k} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_1 + \varepsilon_{1,k} \\ \vdots \\ u_n + \varepsilon_{n,k} \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\|\varepsilon_{i,k}\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Avec ces notations et en inversant A_k, on obtient :

$$\begin{pmatrix} T_1^{n_k} x_1 \\ \vdots \\ T_1^{n_k} x_n \end{pmatrix} = A_k^{-1} \begin{pmatrix} u_{1,k} \\ \vdots \\ u_{n,k} \end{pmatrix}.$$

Notons également

$$A_k^{-1} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^k & \cdots & a_{1,n}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}^k & \cdots & a_{n,n}^k \end{pmatrix}.$$

Alors comme $\sigma(T_2) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ et $A_k \begin{pmatrix} T_2^{n_k} y_1 \\ \vdots \\ T_2^{n_k} y_n \end{pmatrix} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, on peut en déduire que $\|A_k^{-1}\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $\max(|a_{i,j}^k|,\ 1 \leq i,j \leq n) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, pour tout $m \in \{1, \dots, n\}$,

$$\frac{T_1^{n_k} x_m}{\max(|a_{i,j}^k|,\ 1 \leq i,j \leq n)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Fixons $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \in \{1, \ldots, n\}$, $\frac{\|T_1^{n_k} x_m\|}{\max(|a_{i,j}^k|,\ 1 \leq i,j \leq n)} < \frac{1}{2}$ et $\|\varepsilon_{m,k}\| < \frac{1}{2}$ et notons $|a_{p,q}^k| := \max(|a_{i,j}^k|,\ 1 \leq i,j \leq n)$. Alors, on peut écrire $T_1^{n_k} x_p = \sum_{i=1}^n a_{p,i}^k u_{i,k}$, et donc

$$\left\| u_{q,k} + \sum_{i=1,\ i \neq q}^{n} \frac{a_{p,i}^k}{a_{p,q}^k} u_i^k \right\| = \left\| \frac{T_1^{n_k} x_p}{a_{p,q}^k} \right\| < \frac{1}{2}.$$

Ceci entre en contradiction avec l'hypothèse que l'on a faite au départ : pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\|z - u_i\| > 1$ pour tout $z \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n)$. On en déduit donc que $\dim(X_1) \leq n-1$ et en particulier, si $n = 2$, alors $\dim(X_1) = 1$

On réitère ce processus sur $T_2 \oplus T_3$ qui est fortement n-supercyclique : soit il existe un cercle qui intersecte toutes les composantes du spectre de $T_2 \oplus T_3$ et de ce fait la preuve est terminée, soit on trouve une décomposition de $T_2 \oplus T_3$ en somme directe d'opérateurs dont le premier agit sur un espace de dimension inférieure ou égale à $n-1$ de la même façon que l'on vient de le faire. De plus, comme d'après le Théorème 2.34 il n'existe pas d'opérateur fortement n-supercyclique sur un espace de dimension supérieure à n, il est clair que ce processus est fini. De plus, dans le cas où $n = 2$ on peut ajouter que $T_{|F}$ est diagonal. En effet, soit $\dim(F) = 0$ et il n'y a rien à prouver, soit $1 \leq \dim(F) \leq 2$ et dans ce dernier cas, $\dim(X_1) = 1$. Quitte à réitérer ce raisonnement, on déduit que $T_{|F}$ est diagonal. On retrouve donc le résultat annoncé en regroupant dans la décomposition les espaces de dimension finie.

$\square$

Ce théorème général peut-être amélioré si l'on regarde le cas particulier où $n = 2$. On peut alors préciser la décomposition ci-dessus et donner certaines propriétés vérifiées par la restriction de l'opérateur à X_0. En effet, on sait d'après la Proposition 1.18 que si T est supercyclique, alors soit T^* n'a aucune valeur propre, soit il en possède une seule $\{\lambda\}$ et dans ce cas, l'opérateur $\lambda^{-1}T$ est hypercyclique sur un hyperplan de X. Le corollaire suivant donne un résultat analogue pour le cas des opérateurs fortement 2-supercycliques.

Corollaire 3.5. *Soit X un espace de Banach complexe et T un opérateur fortement 2-supercyclique sur X. Alors :*

- *Soit il existe $R \geq 0$ tel que le cercle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ intersecte chaque composante du spectre de T,*
- *Soit on peut décomposer T sous la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ avec S supercyclique.*
- *Soit on peut décomposer T sous la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix}$ avec $\frac{S}{a} \oplus \frac{S}{b}$ hypercyclique.*

Preuve :
Le Théorème 3.4 nous donne l'alternative suivante : soit il existe un cercle qui intersecte chaque composante du spectre de T et dans ce cas la preuve est terminée, soit on peut décomposer $X = F \oplus X_0$ avec F de dimension au plus 2 et $S := T_{|F}$ diagonal et où il existe un cercle qui intersecte toutes les composantes du spectre de $T_0 := T_{|X_0}$.

• Si $\dim(F) = 1$, d'après ce qui précède on peut écrire $T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$. En faisant des combinaisons linéaires, on peut supposer que L est un espace fortement 2-supercyclique et que $L = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}\right)$.
Nous allons montrer que S est supercyclique. Soit $z \in X_0$, comme T est fortement 2-supercyclique, il existe une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et des $A_k := \begin{pmatrix} \lambda_1^{n_k} & \lambda_2^{n_k} \\ \mu_1^{n_k} & \mu_2^{n_k} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ tels que

$$A_k \begin{pmatrix} S^{n_k}x \\ S^{n_k}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + \varepsilon_1^{n_k} \\ z + \varepsilon_2^{n_k} \end{pmatrix} \text{ avec } \varepsilon_1^{n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \varepsilon_2^{n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et

$$A_k \begin{pmatrix} a^k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \delta_1^{n_k} \\ 0 + \delta_2^{n_k} \end{pmatrix} \text{ avec } \delta_1^{n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \delta_2^{n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, en inversant A_k, on obtient :

$$S^{n_k}y = \frac{-\mu_1^{n_k}\varepsilon_1^{n_k} + \lambda_1^{n_k}(z + \varepsilon_2^{n_k})}{\lambda_1^{n_k}\mu_2^{n_k} - \lambda_2^{n_k}\mu_1^{n_k}}.$$

Ainsi, en multipliant cette dernière égalité par a^k, on a :

$$\begin{aligned} a^k(\lambda_1^{n_k}\mu_2^{n_k} - \lambda_2^{n_k}\mu_1^{n_k})S^{n_k}y &= -a^k\mu_1^{n_k}\varepsilon_1^{n_k} + a^k\lambda_1^{n_k}(z + \varepsilon_2^{n_k}) \\ &= -\delta_2^{n_k}\varepsilon_1^{n_k} + (1 + \delta_1^{n_k})(z + \varepsilon_2^{n_k}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} z. \end{aligned}$$

Ce qui montre la supercyclicité de S sur X_0.

• Si $\dim(F) = 2$, d'après ce qui précède on peut écrire $T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix}$.
Pour montrer que S vérifie la condition $\frac{S}{a} \oplus \frac{S}{b}$ est hypercyclique, il suffit d'utiliser le Théorème 3.2.

□

Remarque 3.6. Il est intéressant de remarquer que les trois alternatives du théorème précédent sont nécessaires.

En effet, il est facile de trouver un opérateur fortement 2-supercyclique dont toutes les composantes du spectre intersectent le même cercle puisqu'il suffit de prendre un opérateur vérifiant le critère de supercyclicité.

Pour le deuxième cas, si l'on considère $\phi \in H^\infty(\mathbb{D})$ défini par $\phi(z) = 1 + \imath + z$, M_ϕ l'opérateur de multiplication qui lui est associé sur $H^2(\mathbb{D})$ et $R_n := \sum_{i=1}^{n-1}(M_\phi^*)^i$, alors en suivant l'exercice 1.9 de [7], on montre qu'il existe $u \in H^2(\mathbb{D})$ qui est un vecteur universel pour R_n et $u \notin Im(M_\phi^* - I)$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & M_\phi^* \end{pmatrix}$ est supercyclique mais n'est pas semblable à un opérateur de la forme $I \oplus S$. De plus, comme M_ϕ^* vérifie le critère d'hypercyclicité pour la suite des entiers naturels, on déduit que $\{R_n \oplus M_\phi^{*n}\}_{n\geq 2}$ vérifie aussi le critère d'universalité et admet un vecteur de la forme $u \oplus v$ comme vecteur universel où u est un vecteur choisi comme ci-dessus. Dans ces conditions, pour $a \neq 0$, on remarque facilement que $T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & u & M_\phi^* \end{pmatrix}$ est fortement 2-supercyclique sur $\mathbb{C}^2 \oplus H^2(\mathbb{D})$ de sous-espace supercyclique L engendré par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cependant, T n'est pas semblable à un opérateur de la forme $bI \oplus cI \oplus T_0$ et ne vérifie donc pas la condition d'existence d'un cercle qui coupe toutes les composantes de son spectre si a est bien choisi ($|a|$ supérieur au rayon spectral de T_0 par exemple).

Et pour le dernier cas, on vérifie que $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & M_\phi^* \end{pmatrix}$ est fortement 2-supercyclique sur $\mathbb{C}^2 \oplus H^2(\mathbb{D})$ avec $\phi(z) = 1 + z$ et $\sigma(T) = \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\} \cup D(1,1)$.

3.2 Critère de l'angle et opérateurs de composition

3.2.1 Introduction

Il existe une condition nécessaire très simple pour la supercyclicité. Cette condition est connue sous le nom de critère de l'angle. C'est un théorème géométrique qui montre qu'un opérateur ne peut pas être supercyclique s'il n'existe pas de vecteur dont les itérés se déplacent dans chaque cône donné par un ouvert non-vide de l'espace. Ce critère a été utilisé pour la première fois par Montes-Rodríguez et Salas en 2001 [43] puis a été repris dans le cadre des espaces de Banach par Gallardo-Gutiérrez et Partington en 2005 [24].

Théorème (Critère de l'angle) 3.7. *Soit X un espace de Banach, T un opérateur borné supercyclique sur X et x un vecteur supercyclique pour T. Alors*

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{|\langle x^*, T^n(x) \rangle|}{\|x^*\| \|T^n(x)\|} = 1$$

pour tout $x^* \in X^* \setminus \{0\}$.

Ce critère est très pratique pour montrer que certains opérateurs ne sont pas supercycliques. On peut par exemple citer le corollaire suivant qui permet de détecter certains opérateurs non-supercycliques.

Corollaire 3.8. *Soit T un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach X. Supposons qu'il existe un ouvert non-vide U de X tel que pour tout $x \in U$, il existe une forme linéaire non-nulle x^* vérifiant :*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\|T^{*n}(x^*)\|}{\|T^n(x)\|} = 0.$$

Alors T n'est pas supercyclique.

Malheureusement, ce critère, bien que très pratique, n'est pas toujours suffisant. Toutefois, en 2005 Gallardo et Partington montrent pour la première fois que sous certaines conditions, il est possible d'obtenir un résultat réciproque. Avant d'énoncer un résultat dans ce sens, nous allons avoir besoin de donner un sens précis à la notion de rondeur pour la boule unité de notre espace.

Définition 3.9. Soit X un espace de Banach et $x \in X$. Le vecteur x est dit fortement exposé s'il existe une forme linéaire continue $x^* \in \mathcal{S}_{X^*}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

a) $\langle x^*, x\rangle = 1$,

b) pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de B_X vérifiant $\langle x^*, x_n\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a

$$\|x - x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On peut maintenant énoncer un résultat réciproque au critère de l'angle. Ce résultat est extrait de [7].

Théorème 3.10. *Soit X un espace de Banach. Supposons que les points fortement exposés de $\mathcal{S}_X$ sont denses dans $\mathcal{S}_X$. Si T est un opérateur linéaire borné et x est un vecteur de X qui vérifie la condition donnée par le Théorème 3.7, alors x est un vecteur supercyclique pour T.*

Ce résultat peut se révéler très utile en pratique. Ces résultats ont étés utilisés par Gallardo-Guttiérez et Montes-Rodríguez [22] pour clore la caractérisation des opérateurs de composition par une fraction rationnelle en terme de supercyclicité. Ceci complète le travail fait par Bourdon et Shapiro [14].

3.2.2 Critère de l'angle fortement n-supercyclique

Il est assez facile de remarquer que de la même façon, il y a une question d'orientation des vecteurs de base quand on s'intéresse à la forte n-supercyclicité. En effet, de façon grossière, un opérateur est fortement n-supercyclique s'il existe une base d'un espace de dimension n telle qu'à chaque itération les vecteurs de base obtenus se déplacent indépendamment les uns des autres et dans toutes les directions. Cette remarque permet d'imaginer le critère "multi-angles" suivant pour les opérateurs fortement n-supercycliques.

Proposition 3.11. *Soient X un espace de Banach, T un opérateur linéaire borné fortement n-supercyclique sur X et L un sous-espace fortement n-supercyclique pour T. Alors pour tous $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$, il existe n suites $(y_1^k)_{k\in\mathbb{N}}, \dots, (y_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de L telles que :*

$$\limsup_{k\in\mathbb{N}} \min_{1\le i\le n} \left(\frac{|\langle x_i^*, T^k(y_i^k)\rangle|}{\|x_i^*\|\|T^k(y_i^k)\|} \right) = 1.$$

Preuve :

Soient $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$. Par définition de la norme duale, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $z_1, \dots, z_n \in \mathcal{S}_X$ tels que pour tout $1 \le i \le n$, $\left\langle \frac{x_i^*}{\|x_i^*\|}, z_i \right\rangle > (1-\varepsilon)$. De plus, comme L est fortement n-supercyclique pour T, il existe une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et n suites $(y_1^k)_{k\in\mathbb{N}}, \dots, (y_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$

d'éléments de L vérifiant $\lim_{k\to+\infty} T^{n_k}(y_i^k) = z_i$ pour tout $1 \le i \le n$. Ainsi, pour tout $1 \le i \le n$, on a la convergence suivante :

$$\lim_{k\in\mathbb{N}} \frac{|\langle x_i^*, T^{n_k}(y_i^k)\rangle|}{\|x_i^*\|\|T^{n_k}(y_i^k)\|} = \frac{|\langle x_i^*, z_i\rangle|}{\|x_i^*\|\|z_i\|} \ge 1-\varepsilon$$

En regroupant ces inégalités en une seule on obtient le résultat annoncé.

□

Proposition 3.12. *Supposons que les points fortement exposés de $\mathcal{S}_X$ sont denses dans $\mathcal{S}_X$. Si pour tous $x_1^*,\dots,x_n^* \in X^*$, il existe n suites $(y_1^k)_{k\in\mathbb{N}},\dots,(y_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de L telles que :*

$$\limsup_{k\in\mathbb{N}} \min_{1\le i\le n} \left(\frac{|\langle x_i^*, T^k(y_i^k)\rangle|}{\|x_i^*\|\|T^k(y_i^k)\|} \right) = 1,$$

alors L est fortement n-supercyclique pour T.

Preuve :
Sous l'hypothèse

$$\limsup_{k\in\mathbb{N}} \min_{1\le i\le n} \left(\frac{|\langle x_i^*, T^k(y_i^k)\rangle|}{\|x_i^*\|\|T^k(y_i^k)\|} \right) = 1,$$

on remarque que pour tout choix de n formes linéaires $x_1^*,\dots,x_n^*$, il existe une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $1 \le i \le n$:

$$\|x_i^*\| = \lim_{k\in\mathbb{N}} \max_{z\in T^{n_k}(L),\|z\|=1} |\langle x_i^*, z\rangle| .$$

Nous allons montrer que si l'on note $\mathcal{F}$ l'ensemble des points fortement exposés, alors $\mathcal{F}^n$ est contenu dans $\overline{\cup_{k\in\mathbb{N}} T^k(L)\times\cdots\times T^k(L)}$. Considérons donc n points $x_1,\dots,x_n$ fortement exposés et notons $x_1^*,\dots,x_n^*$ les formes linéaires qui permettent de vérifier la Définition 3.9 pour ces points. D'après la remarque ci-dessus, il existe une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et n suites de points $(z_1^k)_{k\in\mathbb{N}},\dots,(z_n^k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{S}_{T^{n_k}(L)})_{k\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\|x_i^*\| = \lim_{k\in\mathbb{N}} \left|\langle x_i^*, z_i^k\rangle\right| .$$

Pour $i = 1,\dots,n$, soient $(\lambda_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$ des suites de nombres complexes de module 1 vérifiant :

$$\|x_i^*\| = \lim_{k\in\mathbb{N}} \langle x_i^*, \lambda_i^k z_i^k\rangle.$$

Par définition des formes linéaires $x_1^*,\dots,x_n^*$, ceci implique que pour tout $1 \le i \le n$,

$$\lim_{k\to+\infty} \|x_i - \lambda_i^k z_i^k\| = 0.$$

Ainsi, on vient de montrer que $(x_1,\dots,x_n) \in \overline{\cup_{k\in\mathbb{N}} T^k(L)\times\cdots\times T^k(L)}$. Enfin, comme l'ensemble des points fortement exposés $\mathcal{F}$ est dense sur $\mathcal{S}_X$, on obtient la densité de l'ensemble ci-dessus.

□

De la même façon que l'on a obtenu le Corollaire 3.8, il est possible d'obtenir un corollaire du même style dans le cas fortement n-supercyclique.

Corollaire 3.13. *Soit U un ouvert de X contenant une sphère de rayon $R > 0$ d'un sous-espace de dimension n. On suppose qu'il existe n formes linéaires non-nulles $x_1^*, \dots, x_n^*$ telles que :*

$$\lim_{k\in\mathbb{N}} \min_{1\leq i\leq n} \left(\frac{\|T^{*k}(x_i^*)\|}{\|T^k(x_i)\|} \right) = 0$$

pour tous $x_1, \dots, x_n \in U$. Alors T n'est pas fortement n-supercyclique.

Preuve :

Soient $x_1^*, \dots, x_n^*$ des formes linéaires vérifiant :

$$\lim_{k\in\mathbb{N}} \min_{1\leq i\leq n} \left(\frac{\|T^{*k}(x_i^*)\|}{\|T^k(x_i)\|} \right) = 0$$

pour tous $x_1, \dots, x_n \in U$.
Supposons par l'absurde que T est fortement n-supercyclique. On remarque que comme U est un ouvert contenant la sphère de rayon R d'un sous-espace de dimension n, alors $U \times \cdots \times U$ contient une base $\{f_1, \dots, f_n\}$ d'un sous-espace vectoriel F de dimension n. De plus, comme $\mathcal{ES}_n(T)$ est un G_δ dense de $\mathbb{P}_n(X)$ alors $\pi_n^{-1}(\mathcal{ES}_n(T))$ est dense dans X^n. On peut donc trouver une suite de vecteurs $\big((f_1^k, \dots, f_n^k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ de X^n telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\pi_n((f_1^k, \dots, f_n^k)) = F_k$ est fortement n-supercyclique et

$$(f_1^k, \dots, f_n^k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} (f_1, \dots, f_n).$$

On utilise le Lemme 3.29 qui sera énoncé et prouvé dans la section suivante pour remarquer que si l'on prend k suffisamment grand, alors la sphère de rayon R de l'espace F_k est contenue dans U car celle de F l'est et U est ouvert. Pour ne pas surcharger les notations, on peut donc supposer, sans perte de généralité, que F est un sous-espace fortement n-supercyclique pour T.

De plus, d'après la Proposition 3.11, il existe n suites $(y_1^k)_{k\in\mathbb{N}}, \dots, (y_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de L telles que :

$$\limsup_{k\in\mathbb{N}} \min_{1\leq i\leq n} \left(\frac{|\langle x_i^*, T^k(y_i^k)\rangle|}{\|x_i^*\|\|T^k(y_i^k)\|} \right) = 1. \tag{3.1}$$

Enfin, comme U contient la sphère unité de F, il est clair que pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{Ry_i^k}{\|y_i^k\|} \in U$. Ainsi en appliquant l'opérateur dual dans la relation (3.1) puis en renormalisant, on obtient :

$$
\begin{aligned}
1 &= \limsup_{k\in\mathbb{N}} \min_{1\leq i\leq n} \left(\frac{|\langle x_i^*, T^k(y_i^k)\rangle|}{\|x_i^*\|\|T^k(y_i^k)\|} \right) \\
&= \limsup_{k\in\mathbb{N}} \min_{1\leq i\leq n} \left(\frac{|\langle T^{*k}(x_i^*), y_i^k\rangle|}{\|x_i^*\|\|T^k(y_i^k)\|} \right) \\
&\leq \limsup_{k\in\mathbb{N}} \min_{1\leq i\leq n} \left(\frac{\|T^{*k}(x_i^*)\|}{\|T^k(y_i^k)\|} \frac{\|y_i^k\|}{\|x_i^*\|} \right) \\
&= \limsup_{k\in\mathbb{N}} \min_{1\leq i\leq n} \left(\frac{\|T^{*k}(x_i^*)\|}{\|T^k(\frac{Ry_i^k}{\|y_i^k\|})\|} \frac{R}{\|x_i^*\|} \right) \\
&\leq \frac{R}{\min_{1\leq i\leq n}(\|x_i^*\|)} \limsup_{k\in\mathbb{N}} \min_{1\leq i\leq n} \left(\frac{\|T^{*k}(x_i^*)\|}{\|T^k(\frac{Ry_i^k}{\|y_i^k\|})\|} \right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Ce qui contredit l'égalité avec 1. On en déduit que T n'est pas fortement n-supercyclique.

□

3.2.3 Application aux opérateurs de composition

Nous allons dans la suite appliquer le critère de l'angle que nous venons de démontrer à l'étude des propriétés dynamiques des opérateurs de composition. Auparavant, nous aurons besoin de rappeler certaines notions concernant les homographies de la sphère de Riemann.

Classification des homographies de $\mathbb{D}$

Les homographies de $\mathbb{D}$ (respectivement de la sphère de Riemann), notées $\mathbf{LFM}(\mathbb{D})$ (respectivement $\mathbf{LFM}(\hat{\mathbb{C}})$), sont les applications de $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ (respectivement $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$) de la forme

$$\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

où $ad - bc \neq 0$ pour ne pas considérer les fonctions constantes. Une homographie de $\mathbb{D}$ est la restriction à $\mathbb{D}$ d'un automorphisme de la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ qui envoie $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$.

Il est classique de classifier les homographies par rapport à leurs points fixes. En effet, il est bien connu qu'une homographie de $\mathbb{D}$ possède au moins un point fixe et au plus deux points fixes sauf si c'est l'application identité. Notons pour cela $\mathbb{P}_+$ le demi-plan supérieur et $\sigma(z) = \imath\frac{1+z}{1-z}$ l'application de Cayley qui est une application conforme de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{P}_+$.

• Une homographie ϕ est dite parabolique si elle possède un seul point fixe. De plus, ce point fixe se trouve sur le bord de $\mathbb{D}$ et ϕ est conjuguée à une translation $\Phi(z) := z + \imath a$, avec $\Re(a) > 0$, par σ

$$\phi = \sigma^{-1}\Phi\sigma.$$

De plus, ϕ est un automorphisme si et seulement si $\Re(a) = 0$.

• Si ϕ possède deux points fixes distincts, alors ϕ est conjuguée à une dilatation $\Phi(z) := \mu z$ par σ

$$\phi = \sigma^{-1}\Phi\sigma.$$

$\star$ Si $\mu > 0$, alors ϕ est dite hyperbolique. Une telle application possède un point fixe attractif dans $\overline{\mathbb{D}}$ et un second point fixe en dehors de $\mathbb{D}$. De plus, ces deux points fixes sont situés sur le bord de $\mathbb{D}$ si et seulement si ϕ est un automorphisme.

$\star$ Si $|\mu| = 1$, alors ϕ est dite elliptique. Dans ce cas, ϕ admet un point fixe dans $\mathbb{D}$, un autre en dehors de $\overline{\mathbb{D}}$ et ϕ est un automorphisme de $\mathbb{D}$.

$\star$ Dans les autres cas, ϕ est dite loxodromique. ϕ admet alors un point fixe attractif dans $\mathbb{D}$ et un autre en dehors de $\overline{\mathbb{D}}$.

Le critère de l'angle pour les opérateurs supercycliques a permis de montrer que les homographies paraboliques non-automorphes de $\mathbb{D}$ induisent des opérateurs de composition qui ne sont pas supercycliques. Nous avons développé dans la section précédente un critère de l'angle fortement n-supercyclique et nous allons utiliser ce critère pour décider de la forte n-supercyclicité de ces mêmes opérateurs de composition.

Corollaire 3.14. *Soit ϕ une homographie de $\mathbb{D}$. On considère l'opérateur de composition $C_\phi : \mathbb{H}^2(\mathbb{D}) \to \mathbb{H}^2(\mathbb{D})$. Si ϕ est une fonction parabolique non-automorphe de $\mathbb{D}$ alors C_ϕ n'est fortement n-supercyclique pour aucun $n \in \mathbb{N}^*$.*

Pour démontrer ce corollaire, nous allons utiliser une preuve du fait que les opérateurs de composition, dont le symbole est une homographie parabolique non-automorphe, ne sont pas supercyclique due à Bayart et Matheron. Nous synthétisons donc les principaux éléments de la preuve de Bayart et Matheron dans le lemme suivant. Les lecteurs intéressés par les détails de ce résultats pourront se reporter directement au livre de Bayart et Matheron [7] (Théorème 9.14 p.224).

Lemme 3.15. *Il existe des isométries :*

$$\mathbb{H}^2(\mathbb{D}) \xrightarrow{J_1} \mathbb{H}^2(\mathbb{P}_+) \xrightarrow{J_2} L^2(0,\infty)\ .$$

De plus, si l'on se fixe $\tau > 0$ et si l'on pose

$$\phi(z) := \frac{(2-a)z + a}{-az + 2 + a}$$

avec $\Re(a) > 0$ et

$$U := \{f \in \mathbb{H}^2(\mathbb{D}) : \mathbb{1}_{(0,\tau)} J_2 \circ J_1(f) \neq 0\},$$

alors pour tout $f \in U$, il existe une constante $C_{f,\tau} > 0$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|C_\phi^k(f)\| \geq C_{f,\tau} e^{-k\Re(a)\tau}$$

et il existe $g \in \mathbb{H}^2(\mathbb{D})$ non-nul tel que

$$\|C_\phi^{*k}(g)\| = o(e^{-k\Re(a)\tau}).$$

Preuve du corollaire :

Soit ϕ une fonction parabolique non-automorphe de $\mathbb{D}$, alors quitte à conjuguer ϕ par un automorphisme de $\mathbb{D}$, on peut supposer que ϕ admet pour point fixe le point 1. De plus, ϕ est conjugué à une translation $\Phi(z) := z + \imath a$, avec $\Re(a) > 0$ ainsi en calculant, on obtient :

$$\phi(z) = \frac{(2-a)z + a}{-az + 2 + a}.$$

Pour montrer le corollaire, nous allons appliquer le Corollaire 3.13. On remarque pour commencer que l'ensemble U défini dans le lemme 3.15 est un ensemble ouvert non-vide. De plus, si l'on pose

$$\widetilde{U} := \{g \in L^2(0,\infty) : \mathbb{1}_{(0,\tau)} g \neq 0\},$$

alors il est clair que le sous-espace $L^2(0,\tau)$ est contenu dans $\widetilde{U} \cup \{0\}$. En transférant cet espace par les isométries J_1 et J_2, on obtient que $U \cup \{0\}$ contient un sous-espace vectoriel de dimension infinie de $\mathbb{H}^2(\mathbb{D})$. En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, U contient la sphère unité d'un sous-espace de dimension n. De plus, pour tout $f \in U$,

$$\lim_{k\in\mathbb{N}} \frac{\|C_\phi^{*k}(g)\|}{\|C_\phi^k(f)\|} \leq \lim_{k\in\mathbb{N}} \frac{o(e^{-k\Re(a)\tau})}{C_{f,\tau} e^{-k\Re(a)\tau}} = \lim_{k\in\mathbb{N}} o(1) = 0.$$

Par conséquent, pour tous $f_1, \ldots, f_n \in U$,

$$\lim_{k\in\mathbb{N}} \min_{1\leq i\leq n} \left(\frac{\|C_\phi^{*k}(g)\|}{\|C_\phi^k(x_i)\|} \right).$$

Il suffit donc d'appliquer le Corollaire 3.13 avec $x_1^* = \cdots = x_n^* = g$ pour conclure la démonstration.

□

Les cas où l'homographie est hyperbolique ou est un automorphisme parabolique se traite plus facilement. En effet, on peut réutiliser les preuves déjà connues pour le cas hypercyclique.

Proposition 3.16. *Soit ϕ une homographie de $\mathbb{D}$. On considère l'opérateur de composition $C_\phi : \mathbb{H}^2(\mathbb{D}) \to \mathbb{H}^2(\mathbb{D})$. Si ϕ est hyperbolique ou est un automorphisme parabolique de $\mathbb{D}$ alors C_ϕ est fortement n-supercyclique.*

Preuve :

Si ϕ est hyperbolique ou si ϕ est un automorphisme parabolique de $\mathbb{D}$, alors on peut montrer que C_ϕ vérifie le critère d'hypercyclicité (cf [7]). Il s'ensuit donc que C_ϕ est fortement n-supercyclique pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après le Corollaire 1.47.

□

Il nous reste à traiter le cas où ϕ admet un point fixe dans $\mathbb{D}$, c'est-à-dire les cas elliptique et loxodromique.

Pour cela, nous aurons besoin du résultat suivant dû à Bayart [3]

Théorème 3.17. *Soit X un espace de Banach de dimension infinie et $T \in \mathcal{L}(X)$ une isométrie. Alors pour tout $N \geq 1$, T n'est pas N-supercyclique.*

En suivant une idée d'Ansari et Bourdon et grâce au résultat de Bayart ci-dessus, on montre que si le symbole est un automorphisme qui possède un point fixe dans le disque unité ouvert, alors l'opérateur de composition associé n'est jamais n-supercyclique.

Proposition 3.18. *Soit $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ un automorphisme et $\phi(p) = p$ pour un point $p \in \mathbb{D}$. Alors $C_\phi : \mathbb{H}^2(\mathbb{D}) \to \mathbb{H}^2(\mathbb{D})$ n'est pas N-supercyclique pour $N \geq 1$.*

Preuve :

Comme ϕ est un automorphisme, C_ϕ est conjugué à une isométrie mais le Théorème 3.17 assure qu'une isométrie ne peut pas être N-supercyclique.

$\square$

En particulier, cette proposition clôt l'étude de la n-supercyclicité pour les homographies elliptiques et les homographies loxodromiques qui sont des automorphismes de $\mathbb{D}$.

Il reste à étudier le cas où le symbole est non-automorphe et possède un point fixe dans $\mathbb{D}$. Pour cela, on s'inspire d'un résultat de Gallardo-Gutiérrez et Montes-Rodríguez [23].

Proposition 3.19. *Soit ϕ une application holomorphe non-automorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ ayant un point fixe dans le disque unité ouvert. Alors $C_\phi : \mathbb{H}^2(\mathbb{D}) \to \mathbb{H}^2(\mathbb{D})$ n'est pas N-supercyclique pour $N \geq 1$.*

Remarque 3.20. On sait déjà d'après les travaux d'Ansari et Bourdon [2] qu'un tel opérateur de composition ne peut pas être supercyclique.

Preuve :

Supposons par l'absurde que C_ϕ est N-supercyclique et soit $L := \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_N)$ un espace N-supercyclique pour C_ϕ. Notons p le point fixe de ϕ situé dans le disque unité.

Supposons qu'une fonction $g \in \mathbb{H}^2(\mathbb{D})$, vérifiant $g(p) \neq 0$, soit dans l'orbite de L par T. Alors, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une suite de scalaires $(\lambda_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite d'éléments $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de la sphère unité de L telles que :

$$\lambda_{n_k} C_{\phi^{n_k}}(s_{n_k}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} g \text{ dans } \mathbb{H}^2(\mathbb{D}).$$

De plus, comme la sphère unité de L est compacte, on peut supposer que la suite $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un point s de la sphère unité de L. La convergence dans $\mathbb{H}^2(\mathbb{D})$ impliquant la convergence simple, on a

$$\begin{aligned} g(p) &= \lim_{k\to+\infty} \lambda_{n_k} C_{\phi^{n_k}}(s_{n_k})(p) \\ &= \lim_{k\to+\infty} \lambda_{n_k} s_{n_k}(\phi^{n_k}(p)) \\ &= \lim_{k\to+\infty} \lambda_{n_k} s_{n_k}(p) \\ &= \lim_{k\to+\infty} \lambda_{n_k} s(p) \end{aligned}$$

On remarque en particulier que par hypothèse $s(p) \neq 0$. De plus, comme ϕ est elliptique mais n'est pas un automorphisme, alors p est un point fixe attractif et $\lim_{k\to+\infty} \phi^{n_k}(z) = p$.

Ainsi, on a pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} g(z) &= \lim_{k\to+\infty} \lambda_{n_k} C_{\phi^{n_k}}(s_{n_k})(z) \\ &= \lim_{k\to+\infty} \lambda_{n_k} s_{n_k}(\phi^{n_k}(z)) \\ &= \lim_{k\to+\infty} \lambda_{n_k} s(p) \text{ car } s_{n_k} \to s \text{ uniformément sur les compacts} \\ &= g(p) \end{aligned}$$

On en déduit que g est une fonction constante.
On a donc montré que si une fonction est dans l'orbite de L par C_ϕ, alors cette fonction est soit constante soit elle s'annule en p. Comme ce n'est pas le cas de toutes les fonctions de $\mathbb{H}^2(\mathbb{D})$, on aboutit à une contradiction attendue.

□

Ceci conclut l'étude de la dynamique des opérateurs de compositions ayant pour symbole une homographie de $\mathbb{D}$. On peut résumer ces résultats par le corollaire suivant.

Corollaire 3.21. *Soit ϕ une homographie de $\mathbb{D}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) C_ϕ est hypercyclique

(ii) C_ϕ est supercyclique

(iii) C_ϕ est fortement n-supercyclique

3.3 Quelques liens entre les indices de forte supercyclicité

Nous avons jusqu'à présent exhibé un certain nombre de propriétés et d'exemples d'opérateurs fortement n-supercycliques. Cependant, la plupart des exemples que l'on a obtenus sont fortement n-supercycliques pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il est donc naturel de se demander s'il existe des liens entre les notions d'opérateurs fortement n-supercycliques pour différentes valeurs de n. La question qui motive cette section est de savoir quelles libertés sont accordées à l'ensemble Λ_T composé des indices n pour lesquels T est fortement n-supercyclique.

À titre de comparaison, il est bien connu que dans le cas des opérateurs n-supercycliques, s'il n'est pas vide, cet ensemble est un intervalle infini à droite de l'ensemble des nombres entiers positifs. De plus, pour n'importe quel intervalle infini à droite on sait construire un opérateur qui admet cet ensemble comme ensemble d'indices de supercyclicité.

3.3.1 Un exemple d'opérateur fortement n-supercyclique mais pas fortement $(n-1)$-supercyclique

Nous commençons par montrer qu'à l'instar des opérateurs n-supercycliques, il est possible de construire un opérateur T dont l'ensemble Λ_T est un intervalle infini à droite prédéfini. Pour cela nous allons utiliser le fait que la forte n-supercyclicité est un phénomène infini dimensionnel. On va se servir de cette propriété pour construire un opérateur qui est fortement m-supercyclique si et seulement si $m \geq n$.

Contre-Exemple 3.22. Soit S un opérateur vérifiant le critère d'hypercyclicité sur un espace de Banach Y et $n \geq 2$. Alors $T = Id \oplus S$ défini sur $X = \mathbb{K}^n \oplus Y$ est fortement m-supercyclique pour tout $m \geq n$ mais n'est m-supercyclique pour aucun $m < n$.

Preuve :
Tout d'abord, il est clair que pour tout $m < n$, T n'est pas m-supercyclique car sinon Id serait m-supercyclique sur $\mathbb{K}^n$ ce qui est clairement faux.
Pour montrer que T est fortement m-supercyclique pour tout $m \geq n$, nous allons utiliser le lemme suivant qui est la clef de la démonstration :

Lemme 3.23. *Soit $m \geq 1$, alors il existe $(y_1, \dots, y_m) \in Y^m$ tel que pour toute matrice $A = (\lambda_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m} \in GL_m(\mathbb{K})$, $\{S^k(\sum_{i=1}^m \lambda_{1,i} y_i) \oplus \cdots \oplus S^k(\sum_{i=1}^m \lambda_{m,i} y_i)\}_{k \in \mathbb{N}}$ est dense dans Y^m.*

Preuve :
Comme S vérifie le critère d'hypercyclicité, $R := \underbrace{S \oplus \cdots \oplus S}_{m \text{ fois}}$ est hypercyclique d'après le Théorème 1.4. Soient $(y_1, \dots, y_m) \in Y^m$ un vecteur hypercyclique pour R, $(a_1, \dots, a_m) \in Y^m$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\left\| \begin{pmatrix} S^k y_1 \\ \vdots \\ S^k y_m \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \right\| < \frac{\varepsilon}{\|A\|}.$$

Il existe donc $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in Y^m$ avec $\left\| \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix} \right\| < \frac{\varepsilon}{\|A\|}$ tel que :

$$\begin{pmatrix} S^k y_1 \\ \vdots \\ S^k y_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

c'est-à-dire

$$A \begin{pmatrix} S^k y_1 \\ \vdots \\ S^k y_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix}.$$

On considère alors la norme de chaque côté de l'égalité :

$$\left\| A \begin{pmatrix} S^k y_1 \\ \vdots \\ S^k y_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \right\| = \left\| A \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix} \right\| \leq \|A\| \frac{\varepsilon}{\|A\|} = \varepsilon.$$

Ce qui termine la démonstration de ce lemme !

□

Montrons maintenant que T est fortement m-supercyclique pour tout $m \geq n$. Prenons donc m un entier supérieur ou égal à n, $\{e_1, \ldots, e_m\}$ une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$ à m éléments et considérons $(y_1, \ldots, y_m)$ le vecteur fourni par le lemme précédent. Notons ensuite $x_i = (e_i, y_i) \in X$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. Nous voulons montrer que $M := \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_m)$ est un sous-espace fortement m-supercyclique pour T. Pour cela, il nous suffit de montrer que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{T^k(M) \times \cdots \times T^k(M)}_{m \text{ fois}}$ est dense dans X^m. Il suffit encore de montrer que :

$$\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ (\lambda_{i,j})_{i,j}\in M_m(\mathbb{K})}} \sum_{i=1}^{m} \lambda_{1,i}(e_i \oplus S^k y_i) \oplus \cdots \oplus \sum_{i=1}^{m} \lambda_{m,i}(e_i \oplus S^k y_i) \text{ est dense dans } X^m.$$

Soient donc $\varepsilon > 0$, $(t_1, \ldots, t_m) \in (\mathbb{K}^n)^m$ et $(z_1, \ldots, z_m) \in Y^m$. Par densité de $GL_m(\mathbb{K})$ dans $M_m(\mathbb{K})$, il existe $A = (\lambda_{i,j})_{1\leq i,j\leq m} \in GL_m(\mathbb{K})$ tel que :

$$\left\| A \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus, d'après le Lemme 3.23, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\| S^k(\sum_{i=1}^{m} \lambda_{1,i} y_i) \oplus \cdots \oplus S^k(\sum_{i=1}^{m} \lambda_{m,i} y_i) - (z_1, \ldots, z_m) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, en regroupant ces deux résultats, on obtient :

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} \lambda_{1,i}(e_i \oplus S^k y_i) \oplus \cdots \oplus \sum_{i=1}^{m} \lambda_{m,i}(e_i \oplus S^k y_i) - \oplus_{i=1}^{m}(t_i \oplus z_i) \right\| < \varepsilon$$

Ce qui montre la densité de l'ensemble souhaité. On a donc montré que T est fortement m-supercyclique pour tout $m \geq n$.

□

Contre-Exemple 3.24. Soit S un opérateur vérifiant le critère d'hypercyclicité sur un espace de Banach Y et $r + 2s \geq 3$ et $\theta_1, \ldots, \theta_s, \pi$ libres sur $\mathbb{Q}$.
Alors $T = I_r \oplus R_{\theta_1} \oplus \ldots \oplus R_{\theta_s} \oplus S$ défini sur $X = \mathbb{R}^r \oplus \mathbb{R}^{2s} \oplus Y$ est m-supercyclique pour $m \geq r + s$ et fortement m-supercyclique pour $m \geq r + 2s$ mais n'est pas m-supercyclique pour $m < r + s$ ni fortement m-supercyclique pour $m < r + 2s$.

Preuve :
Il est clair que pour tout $m < r + 2s$, T n'est pas fortement m-supercyclique car sinon d'après la Remarque 1.43, $I_r \oplus R_{\theta_1} \oplus \ldots \oplus R_{\theta_s}$ serait fortement m-supercyclique sur $\mathbb{K}^n$ ce qui contredit le Corollaire 2.25 dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou un résultat de Bourdon,Feldman, Shapiro [13] dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. De plus, $I_r \oplus R_{\theta_1} \oplus \ldots \oplus R_{\theta_s}$ est $(s + r)$-supercyclique et $(s + r)$ est minimal pour cette propriété par le Théorème 2.20. Ainsi, si z est un vecteur hypercyclique pour S, alors il est facile de remarquer que les vecteurs

$$(\underbrace{1, 0, 0, \ldots, 0}_{r}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2s}, z),$$
$$(\underbrace{0, 1, 0, \ldots, 0}_{r}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2s}, 0),$$
$$\ldots$$
$$(\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{r}, \underbrace{0, 0, 0, \ldots, 0, 0}_{2s}, 0),$$
$$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, \underbrace{1, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0}_{2s}, 0),$$
$$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, \underbrace{0, 0, 1, 0, \ldots, 0, 0}_{2s}, 0),$$
$$\ldots$$
$$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, \underbrace{0, 0, 0, 0, \ldots, 1, 0}, 0)$$

forment un sous-espace $(r+s)$-supercyclique pour T.

Pour montrer que T est fortement m-supercyclique pour tout $m \geq r + 2s$, il suffit de faire le même raisonnement que dans le contre-exemple précédent et d'utiliser le fait que $I_r \oplus R_{\theta_1} \oplus \cdots \oplus R_{\theta_s}$ est une isométrie sur $\mathbb{R}^{r+2s}$ pour obtenir un argument de compacité qui permet de conclure de la même manière que dans la preuve précédente.

□

Exemple 3.25. En sachant que la forte n-supercyclicité est un phénomène infini dimensionnel sauf s'il est trivial, il est facile de voir que les opérateurs construits avec le Théorème 3.2 comme les opérateurs de l'Exemple 3.3 sont fortement n-supercycliques mais ne sont pas fortement m-supercycliques pour $m < n$.

En se basant sur les exemples précédents, il est possible de construire des opérateurs avec ces mêmes propriétés sur des espaces espace de Banach en toute généralité.

Théorème 3.26. *Soient X un espace de Banach et $n \geq 2$. Alors il existe un opérateur linéaire continu T qui est fortement m-supercyclique si $m \geq n$ mais qui n'est pas m-supercyclique si $m < n$.*

Preuve :

Soit F un sous-espace vectoriel de X de dimension n et Y un supplémentaire topologique de F dans X. Alors il existe un isomorphisme J entre $X = F \oplus Y$ et $\mathbb{K}^n \oplus Y$. De plus, il est bien connu qu'il existe des opérateurs faiblement mélangeant sur tout espace de Banach. Par conséquent, on définit $T = Id \oplus S$ sur $\mathbb{K}^n \oplus Y$ où S est un opérateur faiblement mélangeant sur Y. Alors T est conjugué par J à un opérateur $\tilde{T}$ sur X, celui-ci partage donc les mêmes propriétés dynamiques que T. Or l'Exemple 3.22 montre que T est fortement m-supercyclique pour tout $m \geq n$ mais n'est m-supercyclique pour aucun $m < n$.

□

Remarque 3.27. On peut encore ajouter des intermédiaires dans le théorème précédent en adaptant l'opérateur que l'on définit aux différents exemples présentés auparavant.

3.3.2 Un opérateur supercyclique qui n'est pas fortement n-supercyclique pour un certain $n \geq 2$

Nous avons déjà vu précédemment que la forte n-supercyclicité n'entrainait pas forcément la forte $(n-1)$-supercyclicité. Il est alors naturel de se poser la question inverse : est-ce que la forte n-supercyclicité entraine la forte $(n+1)$-supercyclicité ? Cette question peut également être formulée de la façon suivante : est-ce que l'ensemble Λ_T est un intervalle infini à droite comme dans le cas des opérateurs n-supercycliques ? Nous allons montrer que ce n'est pas toujours le cas. Pour cela, nous allons exhiber un exemple d'opérateur qui est supercyclique mais pas fortement p-supercyclique pour $p \geq 2$. Il est clair qu'il serait vain de chercher de tels contre-exemples en considérant des opérateurs qui vérifient le critère de supercyclicité ou d'hypercyclicité puisque nous avons déjà remarqué que de tels opérateurs sont fortement n-supercycliques pour tout $n \geq 2$ dans le Corollaire 1.47. Les premiers exemples d'opérateurs supercycliques qui ne vérifient pas le critère de supercyclicité sont les suivants : $Id \oplus T : \mathbb{R} \oplus X \to \mathbb{R} \oplus X$ où T est un opérateur hypercyclique sur X et où le corps de base est $\mathbb{C}$. On a aussi $R_\theta \oplus T : \mathbb{R} \oplus X \to \mathbb{R} \oplus X$ où $\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel et T est un opérateur vérifiant le critère d'hypercyclicité sur X et où le corps de base est $\mathbb{R}$. On montre facilement grâce au "Bounded Step Problem" [27] que ces deux opérateurs sont en fait tous les deux fortement 2-supercycliques. Il nous reste donc à considérer des opérateurs plus "compliqués" ne vérifiant pas le critère de supercyclicité. Pour cela, nous allons modifier la construction d'un opérateur hypercyclique qui ne vérifie pas le critère d'hypercyclicité, de Bayart et Matheron [7], pour obtenir pour tout $p \geq 2$, un opérateur supercyclique qui ne vérifie pas le critère de supercyclicité et qui, de plus, n'est pas fortement h-supercyclique pour $2 \leq h \leq p$.

Théorème 3.28. *Soit X un espace de Banach muni d'une base inconditionnelle normalisée $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pour lesquels l'opérateur de décalage à droite sur $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est continu et soit $p \geq 2$. Alors, il existe un opérateur supercyclique qui n'est pas fortement h-supercyclique pour $2 \leq h \leq p$.*

La preuve de ce théorème est assez longue et fait appel à plusieurs résultats intermédiaires, la combinaison de ces résultats nous donnera directement la preuve du théorème ci-dessus. L'idée est de construire l'opérateur puis de créer un critère de non-forte h-supercyclicité utilisable pour cet opérateur et de la même "forme" que celui de [7] afin de pouvoir réutiliser le travail qui a été fait pour la construction de l'opérateur. Nous allons donc commencer par énoncer et démontrer ce critère puis nous continuerons en modifiant la forme linéaire de Bayart et Matheron pour l'adapter à notre critère.
Mais au préalable, il faut nous remettre dans le contexte mathématique approprié. Soit T un opérateur linéaire sur un espace vectoriel topologique X et $e_0 \in X$, alors on notera :

$$\begin{aligned}\mathbb{K}[T](e_0) &= \{P(T)(e_0), P \text{ polynôme}\}\\ &= \mathrm{Vect}\{T^i(e_0), i \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Comme deux polynômes de variable T commutent, on définit un produit sur $\mathbb{K}[T](e_0)$ par la formule suivante :

$$P(T)e_0 \cdot Q(T)e_0 = PQ(T)e_0.$$

Maintenant que le cadre est donné, nous allons énoncer un lemme technique de convergence de boules unités pour des sous-espaces vectoriels de même dimension. Ce lemme nous sera utile dans la preuve du critère de non forte h-supercyclicité.

Lemme 3.29. *Soit X un espace vectoriel normé, $h \geq 2$, $E = Vect(u_1, \dots, u_h)$ un sous-espace vectoriel de dimension h. Pour tout $1 \leq i \leq h$, soit $(v_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X tels que $\|v_i^n - u_i\| \leq \frac{1}{n}$ et notons $F_n := Vect(v_1^n, \dots, v_h^n)$.*
Alors,

$$\sup_{z\in F_n, \|z\|=1} \inf_{x\in E, \|x\|=1} \|x - z\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve :
Posons $M = \max_{1\leq i\leq h} \|u_i^*\|$ et $N > 2hM$ tel que pour tout $n \geq N$ la famille $\{v_1^n, \dots, v_h^n\}$ soit linéairement indépendante. Soit maintenant $n \geq N$. On remarque que si l'on suppose :

$$\sup_{n\geq N} \sup_{z\in F_n, \|z\|=1} |v_i^{n*}(z)| := K_N < +\infty$$

alors, on a :

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in F_n, \|z\|=1} \inf_{x\in E, \|x\|=1} \|x - z\| &\leq \sup_{z\in F_n, \|z\|=1} \left\| \frac{\sum_{i=1}^h v_i^{n*}(z) u_i}{\left\|\sum_{i=1}^h v_i^{n*}(z) u_i\right\|} - z \right\| \\
&\leq \sup_{z\in F_n, \|z\|=1} \left\| \sum_{i=1}^h v_i^{n*}(z) u_i \right\| \left| \frac{1 - \|\sum_{i=1}^h v_i^{n*}(z) u_i\|}{\|\sum_{i=1}^h v_i^{n*}(z) u_i\|} \right| + \left\| \sum_{i=1}^h v_i^{n*}(z) u_i - z \right\| \\
&\leq \sup_{z\in F_n, \|z\|=1} \left| 1 - \left\| \sum_{i=1}^h v_i^{n*}(z) u_i \right\| \right| + \left\| \sum_{i=1}^h v_i^{n*}(z) u_i - z \right\| \\
&\leq \sup_{z\in F_n, \|z\|=1} \left| 1 - \left\| \sum_{i=1}^h v_i^{n*}(z) u_i - z + z \right\| \right| + \left\| \sum_{i=1}^h v_i^{n*}(z) u_i - z \right\| \\
\text{(pour } n \text{ suffisamment grand)} \quad &\leq \sup_{z\in F_n, \|z\|=1} 1 - \left(\|z\| - \left\| \sum_{i=1}^h v_i^{n*}(z) u_i - z \right\| \right) + \left\| \sum_{i=1}^h v_i^{n*}(z) u_i - z \right\| \\
&\leq \sup_{z\in F_n, \|z\|=1} 2 \left\| \sum_{i=1}^h v_i^{n*}(z) u_i - z \right\| \\
&\leq \sup_{z\in F_n, \|z\|=1} 2 \sum_{i=1}^h |v_i^{n*}(z)| \frac{1}{n} \\
&= \frac{2hK_N}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver que cette hypothèse est vérifiée. Pour cela, on définit un opérateur $T_n : X \to X$ par

$$T_n(x) = \sum_{i=1}^h u_i^*(x)(u_i - v_i^n)$$

pour tout $1 \leq i \leq h$. On peut remarquer que :

$$\|T_n\| = \sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{i=1}^h u_i^*(x)(u_i - v_i^n) \right\| \leq \sum_{i=1}^h \|u_i^*\| \|u_i - v_i^n\| \leq \frac{Mh}{n} \leq \frac{1}{2}.$$

Ceci permet de voir que l'opérateur $S_n := I - T_n : X \to X$ vérifiant $S_n(u_i) = v_i^n$ pour tout $1 \leq i \leq h$ est inversible et $S_n^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} T_n^i$. De plus, on connait l'estimation suivante pour la norme de S_n^{-1} :

$$\|S_n^{-1}\| = \left\|\sum_{i=0}^{+\infty} T_n^i\right\| \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \|T_n\|^i \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = 2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sup_{n\geq N} \sup_{z\in F_n, \|z\|=1} |v_i^{n*}(z)| &= \sup_{n\geq N} \sup_{z\in F_n, \|z\|=1} |u_i^*(S_n^{-1}z)| \\ &\leq \sup_{n\geq N} \sup_{z\in F_n, \|z\|=1} \|u_i^*\|\|S_n^{-1}\| \\ &\leq 2M := K_N\end{aligned}$$

ceci prouve l'hypothèse et donc le lemme.

□

On peut maintenant énoncer dans ce contexte le critère de non-forte h-supercyclicité.

Lemme 3.30. *Soient X un espace vectoriel topologique et $T \in L(X)$ cyclique avec le vecteur e_0 cyclique pour T et $h \geq 2$. Supposons qu'il existe $2h$ formes linéaires $\Phi_\delta : \mathbb{K}[T]e_0 \to \mathbb{K}$, $\delta = 0, \ldots, 2h-1$ telles que les applications $(P(T)e_0, Q(T)e_0) \mapsto \Phi_\delta((PQ)(T)e_0)$ soient continues sur $\mathbb{K}[T]e_0 \times \mathbb{K}[T]e_0$ et vérifiant pour tout $\delta \in \{0, \ldots, 2h-1\}$,*

$$\Phi_\delta(T^\delta e_0) = 1 \text{ et } \Phi_\delta(T^i e_0) = 0 \text{ pour } 0 \leq i \neq \delta \leq 2h-1.$$

Alors, T n'est pas fortement h-supercyclique.

Remarque 3.31. En particulier, T ne vérifie pas le critère de supercyclicité.

Preuve :

Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons donc que T est fortement h-supercyclique sur X. Posons $E = \text{Vect}(e_0, \ldots, T^{h-1}e_0)$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Choisissons $E_n \in \pi_h\left(B\left((e_0, \ldots, T^{h-1}e_0); \frac{1}{n}\right)\right) \cap \mathcal{E}S_h(T)$, on peut alors choisir $m_n \in \mathbb{N}, x_n, y_n \in E_n$ non-colinéaires tels que :

$$T^{m_n}x_n \in B\left(e_0; \frac{1}{2n}\right) \text{ et } T^{m_n}y_n \in B\left(T^h e_0; \frac{1}{2n}\right).$$

Posons $\varepsilon_n = \min\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n\|T^{m_n}\|}, \frac{\|x_n\|}{2n+1}, \frac{\|y_n\|}{2n+1}\right)$ alors comme e_0 est cyclique pour T, il existe $P_n, Q_n \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$P_n(T)e_0 \in B(x_n; \varepsilon_n) \text{ et } Q_n(T)e_0 \in B(y_n; \varepsilon_n)$$

et ainsi,

$$T^{m_n}(P_n(T)e_0) \in B\left(e_0; \frac{1}{n}\right) \text{ et } T^{m_n}(Q_n(T)e_0) \in B\left(T^h e_0; \frac{1}{n}\right).$$

Choisissons aussi $a_0^n e_0 + \ldots + a_{h-1}^n T^{h-1}e_0 \in E$ tel que :

$$\|a_0^n e_0 + \ldots + a_{h-1}^n T^{h-1}e_0\| = 1$$

et

$$\left\| a_0^n e_0 + \ldots + a_{h-1}^n T^{h-1} e_0 - \frac{P_n(T)e_0}{\|P_n(T)e_0\|} \right\| = \inf_{x \in E, \|x\|=1} \left\| x - \frac{P_n(T)e_0}{\|P_n(T)e_0\|} \right\|. \tag{3.2}$$

Nous affirmons que ce dernier terme tend vers 0 avec n. Avant d'aller plus loin, nous allons montrer cette convergence ,

$$\inf_{x \in E, \|x\|=1} \left\| x - \frac{P_n(T)e_0}{\|P_n(T)e_0\|} \right\| \leq \inf_{x \in E, \|x\|=1} \left\| x - \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| + \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{P_n(T)e_0}{\|P_n(T)e_0\|} \right\|$$

Il nous suffit maintenant de vérifier que les deux termes ci-dessus tendent bien vers 0 avec n. Pour le premier, il suffit d'appliquer le Lemme 3.29. Le second se traite directement. En effet,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{P_n(T)e_0}{\|P_n(T)e_0\|} \right\| &= \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_n}{\|P_n(T)e_0\|} + \frac{x_n}{\|P_n(T)e_0\|} - \frac{P_n(T)e_0}{\|P_n(T)e_0\|} \right\| \\
&\leq \|x_n\| \left| \frac{1}{\|x_n\|} - \frac{1}{\|P_n(T)e_0\|} \right| + \frac{\|x_n - P_n(T)e_0\|}{\|P_n(T)e_0\|} \\
&\leq \frac{\varepsilon_n}{\|x_n\| - \varepsilon_n} + \frac{\varepsilon_n}{\|x_n\| - \varepsilon_n} \\
&\leq \frac{1}{n} \text{ par définition de } \varepsilon_n.
\end{aligned}$$

On a donc prouvé la convergence vers 0 de (3.2).
De la même façon, on peut choisir $b_0^n e_0 + \ldots + b_{h-1}^n T^{h-1} e_0 \in E$ tel que :

$$\|b_0^n e_0 + \ldots + b_{h-1}^n T^{h-1} e_0\| = 1$$

et

$$\left\| b_0^n e_0 + \ldots + b_{h-1}^n T^{h-1} e_0 - \frac{Q_n(T)e_0}{\|Q_n(T)e_0\|} \right\| = \inf_{x \in E, \|x\|=1} \left\| x - \frac{Q_n(T)e_0}{\|Q_n(T)e_0\|} \right\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, on peut extraire une sous-suite strictement croissante $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de l'ensemble des nombres entiers telle que :

$$a_0^{s_k} e_0 + \ldots + a_{h-1}^{s_k} T^{h-1} e_0 \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} a_0 e_0 + \ldots + a_{h-1} T^{h-1} e_0$$

et

$$b_0^{s_k} e_0 + \ldots + b_{h-1}^{s_k} T^{h-1} e_0 \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} b_0 e_0 + \ldots + b_{h-1} T^{h-1} e_0$$

avec $(a_0, \ldots, a_{h-1}), (b_0, \ldots, b_{h-1}) \in \mathbb{K}^h \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ par compacité de la boule unité en dimension finie. On a donc à présent :

$$\left\| \frac{P_{s_k}(T)e_0}{\|P_{s_k}(T)e_0\|} - (a_0 e_0 + \ldots + a_{h-1} T^{h-1} e_0) \right\| \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

et de la même façon, on obtient :

$$\left\| \frac{Q_{s_k}(T)e_0}{\|Q_{s_k}(T)e_0\|} - (b_0 e_0 + \ldots + b_{h-1} T^{h-1} e_0) \right\| \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soient $0 \leq i, j \leq h-1$ deux entiers vérifiant $a_j \neq 0$ et $b_i \neq 0$. Un tel choix est possible car les vecteurs $a_0 e_0 + \ldots + a_{h-1} T^{h-1} e_0$ et $b_0 e_0 + \ldots + b_{h-1} T^{h-1} e_0$ sont de norme 1. On définit deux formes linéaires continues pour le produit sur $\mathbb{K}[T]e_0$ par

$$\Psi_{i,j} = \Phi_i + \Phi_{h+j} \text{ et } \widetilde{\Psi}_{i,j} = \Phi_i + 2\Phi_{h+j}.$$

Ainsi, en utilisant la continuité pour le produit, on obtient

(3.3)
$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \Psi_{i,j}\left(T^{m_{s_k}} e_0 . P_{s_k}(T) e_0 . \frac{Q_{s_k}(T)e_0}{\|Q_{s_k}(T)e_0\|}\right) &= \lim_{k\to\infty} \Psi_{i,j}\left(T^{m_{s_k}} P_{s_k}(T)e_0 . \frac{Q_{s_k}(T)e_0}{\|Q_{s_k}(T)e_0\|}\right) \\
&= \Psi_{i,j}\left(e_0 . \left(b_0 e_0 + \ldots + b_{h-1} T^{h-1} e_0\right)\right) \\
&= b_i \text{ par définition de } \Psi_{i,j}
\end{aligned}$$

et également

(3.4)
$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \Psi_{i,j}\left(T^{m_{s_k}} e_0 . \frac{P_{s_k}(T)e_0}{\|P_{s_k}(T)e_0\|} . Q_{s_k}(T)e_0\right) &= \lim_{k\to\infty} \Psi_{i,j}\left(T^{m_{s_k}} Q_{s_k}(T)e_0 . \frac{P_{s_k}(T)e_0}{\|P_{s_k}(T)e_0\|}\right) \\
&= \Psi_{i,j}\left(T^h e_0 . \left(a_0 e_0 + \ldots + a_{h-1} T^{h-1} e_0\right)\right) \\
&= \Psi_{i,j}\left(a_0 T^h e_0 + \ldots + a_{h-1} T^{2h-1} e_0\right) \\
&= a_j .
\end{aligned}$$

En faisant la même chose pour la deuxième forme linéaire $\widetilde{\Psi}_{i,j}$, on obtient également

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{\Psi}_{i,j}\left(T^{m_{s_k}} e_0 . P_{s_k}(T) e_0 . \frac{Q_{s_k}(T)e_0}{\|Q_{s_k}(T)e_0\|}\right) = b_i \tag{3.5}$$

et

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{\Psi}_{i,j}\left(T^{m_{s_k}} e_0 . \frac{P_{s_k}(T)e_0}{\|P_{s_k}(T)e_0\|} . Q_{s_k}(T)e_0\right) = 2a_j . \tag{3.6}$$

En considérant le quotient des équations (3.3) et (3.4) et de (3.5) et (3.6), on aboutit à

$$\begin{tikzcd}
& \frac{\|Q_{s_k}(T)e_0\|}{\|P_{s_k}(T)e_0\|} \arrow[dl, equal] \arrow[dr, equal] & \\
\frac{\Psi_{i,j}\left(T^{m_{s_k}} e_0 . \frac{P_{s_k}(T)e_0}{\|P_{s_k}(T)e_0\|} . Q_{s_k}(T)e_0\right)}{\Psi_{i,j}\left(T^{m_{s_k}} e_0 . P_{s_k}(T)e_0 . \frac{Q_{s_k}(T)e_0}{\|Q_{s_k}(T)e_0\|}\right)} \arrow[d, "k\to+\infty"] & & \frac{\widetilde{\Psi}_{i,j}\left(T^{m_{s_k}} e_0 . \frac{P_{s_k}(T)e_0}{\|P_{s_k}(T)e_0\|} . Q_{s_k}(T)e_0\right)}{\widetilde{\Psi}_{i,j}\left(T^{m_{s_k}} e_0 . P_{s_k}(T)e_0 . \frac{Q_{s_k}(T)e_0}{\|Q_{s_k}(T)e_0\|}\right)} \arrow[d, "k\to+\infty"] \\
\frac{a_j}{b_i} \arrow[rr, equal] & & \frac{2a_j}{b_i}
\end{tikzcd}$$

Ceci contredit le fait que $a_j \neq 0$ et $b_i \neq 0$. On déduit donc que T n'est pas fortement h-supercyclique.

□

Revenons maintenant à notre problème, nous connaissons une manière de vérifier qu'un opérateur n'est pas fortement h-supercyclique mais il nous reste la partie principale, c'est-à-dire à trouver un opérateur qui soit supercyclique et ne vérifiant pas le critère de supercyclicité. Pour cela, nous allons travailler sur des espaces de Banach qui ont de "bonnes" propriétés. En effet, pour pouvoir construire notre opérateur nous aurons besoin que notre espace admette une base de Schauder. Il est aujourd'hui bien connu que tous les espaces séparables n'admettent pas de base de Schauder comme l'a montré Per Enflo en 1973, cependant la plupart des espaces classiques en ont une. En fait, nous aurons besoin que notre espace possède plus qu'une simple base, nous aurons besoin d'une base inconditionnelle.

Définition 3.32. Soit X un espace de Banach. On dit que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base inconditionnelle si tout $x \in X$ peut s'écrire de façon unique comme $x = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i e_i$ et si la convergence de cette série est inconditionnelle, c'est-à-dire que $\sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i x_i e_i$ converge pour toute suite $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\{-1, 1\}$. De plus, elle est normalisée si $\|e_i\| = 1$.

Le fait que nous ayons besoin de cette condition sur l'espace est dû à la forme de l'opérateur que nous allons construire. Cet opérateur est très proche d'un opérateur de décalage pondéré, la condition sur la base nous permettra donc de s'assurer de sa continuité à condition de supposer la continuité de l'opérateur de décalage classique.

On considère donc à présent X un espace de Banach muni d'une base inconditionnelle normalisée $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pour laquelle l'opérateur de décalage à droite sur $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est continu et l'on pose :

$$c_{00} = \mathrm{Vect}\{e_i, i \in \mathbb{N}\}.$$

Construire un tel opérateur à partir de rien semble assez compliqué et hasardeux. Pour avoir les idées claires, il est bon d'avoir en tête un plan de bataille à suivre et auquel on pourra se raccrocher. Il suffit en fait de construire un opérateur T vérifiant les conditions suivantes pour vérifier le Théorème 3.28 :

(3.7a) $$\mathrm{Vect}\{T^i e_0, i \in \mathbb{N}\} = \mathrm{Vect}\{e_i, i \in \mathbb{N}\},$$

(3.7b) $$\mathbb{K}[T]e_0 \subseteq \overline{\{\lambda T^i e_0, i \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K}\}},$$

(3.7c) $$T \text{ est continu},$$

(3.7d)

$$\text{Il existe } 2h \text{ formes linéaires } \Phi_\delta : \mathbb{K}[T](e_0) \to \mathbb{K} \text{ telles que pour tout } \delta = 0, \dots, 2h-1,$$
$$(P(T)e_0, Q(T)e_0) \to \Phi_\delta\left((PQ)(T)e_0\right) \text{ sont continues sur } \mathbb{K}[T](e_0) \times \mathbb{K}[T](e_0),$$

(3.7e) Pour tout $2 \leq h \leq p,$ pour tout $\delta \in \{0, \dots, 2h-1\}$ et tout $0 \leq i \neq \delta \leq 2h-1,$

$$\Phi_\delta\left(T^\delta e_0\right) = 1 \text{ et } \Phi_\delta\left(T^i e_0\right) = 0.$$

En effet, en combinant ces cinq conditions avec le Lemme 3.30, on obtient bien le Théorème 3.28.

Construction de l'opérateur T

Pour la construction de l'opérateur T et en particulier pour vérifier la condition (3.7b), nous allons introduire une nouvelle terminologie. Fixons $\mathbf{Q}$ un ensemble dénombrable dense de $\mathbb{K}$. On dit qu'une suite de polynômes $\mathbf{P} = (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *admissible* si $P_0 = 0$ et $\mathbf{P}$ contient tous les polynômes à coefficient dans $\mathbf{Q}$. On notera également $\deg(P)$ le degré de P et $|P|_1$ la somme des modules des coefficients de P et $cd(P)$ le coefficient dominant de P.

Nous allons maintenant expliciter la construction de l'opérateur T supercyclique. Pour des raisons évidentes, il est naturel de chercher un opérateur qui ne soit pas trop compliqué. Dans ce but, nous allons choisir de construire T comme étant un opérateur de décalage à droite pondéré auquel on ajoute assez “rarement” une variation et cela a également l'avantage de faire en sorte que T vérifie (3.7a). Nous allons avoir besoin de deux suites : l'une représentant les poids du décalage $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la seconde strictement croissante $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $b_0 = 0$ représentant les itérés de e_0 pour lesquels l'opérateur de décalage à poids sera perturbé. Comme nous voulons également vérifier (3.7b), on va faire en sorte que les images de e_0 pour les itérés correspondants à la perturbation nous donnent directement (3.7b), pour cela on pose :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ T^{b_n}e_0 = P_n(T)e_0 + e_{b_n}. \tag{3.8}$$

La formule ci-dessus combinée avec le fait que la suite de polynômes $\mathbf{P}$ est admissible permet de s'assurer que l'on peut approcher tout polynôme en T par un itéré de e_0 quitte à multiplier par un scalaire suffisamment proche de 0. En effet, supposons que l'on souhaite approcher $P(T)e_0$ à $\varepsilon > 0$ près, alors comme $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbb{K}$, il existe $q \in \mathbf{Q}$ vérifiant $\left|\frac{1}{q}\right| < \varepsilon$. De plus, comme $\mathbf{P}$ énumère tous les polynômes à coefficients dans $\mathbf{Q}$, il existe un indice $n \in \mathbb{N}$ tel que $P_n(T) = qP(T)$. Ainsi, on peut approcher $P(T)e_0$ à $\left|\frac{1}{q}\right| < \varepsilon$ près car

$$\frac{1}{q}T^{b_n}e_0 = P(T)e_0 + \frac{1}{q}e_{b_n}.$$

Après avoir traité la partie exceptionnelle de l'opérateur, revenons à la partie classique de celui-ci. Comme nous l'avions annoncé précédemment notre opérateur sera un décalage à droite pondéré perturbé. Pour cela, on pose également :

$$\text{pour tout } i \in [b_{n-1}, b_n - 1[\text{ pour } n \in \mathbb{N}^*,\ T(e_i) = w_{i+1}e_{i+1} \tag{3.9}$$

Nous venons de définir T à partir de deux définitions. Cependant, la définition de T n'est pas encore très claire puisque (3.9) définit T sur tous les vecteurs de base sauf ceux qui s'écrivent e_{b_n-1} et (3.8) définit le b_n-ième itéré de T en e_0. Or, on souhaite que notre opérateur soit utilisable, il faut donc ré-exprimer $T^{b_n}e_0$ pour obtenir l'expression de Te_{b_n-1} et ainsi connaitre l'action de T sur tous les vecteurs de base. Pour ceci, on écrit simplement :

$$\begin{aligned}
T^{b_n}e_0 &= T^{b_n-b_{n-1}}T^{b_{n-1}}e_0 \\
&= T^{b_n-b_{n-1}}(P_{n-1}(T)e_0 + e_{b_{n-1}}) \\
&= T^{b_n-b_{n-1}}P_{n-1}(T)e_0 + w_{b_{n-1}+1}\dots w_{b_n-1}Te_{b_n-1}.
\end{aligned}$$

En remplaçant maintenant $T^{b_n}e_0$ par $P_n(T)e_0 + e_{b_n}$ ci dessus, on obtient :

$$Te_{b_n-1} = \varepsilon_n e_{b_n} + f_n$$

où

$$\varepsilon_n = \frac{1}{w_{b_{n-1}+1}\cdots w_{b_n-1}}$$

et

$$f_n = \frac{1}{w_{b_{n-1}+1}\cdots w_{b_n-1}}(P_n(T)e_0 - T^{b_n-b_{n-1}}P_{n-1}(T)e_0). \tag{3.10}$$

Bien sûr, pour que cette définition ait un sens, il faut supposer que $\deg(P_n) < b_n - 1$ ce que nous supposerons à partir de maintenant.

Pour des questions de commodité, nous allons fixer une fois pour toute les suites $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$b_0 = 1, b_n = (2p+1)^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*, w_n = 4\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

On peut remarquer que nous avons pris b_n différent de celui choisi par Bayart et Matheron, la raison est que nous avons besoin d'avoir $b_1 \geq 2p$ pour obtenir la condition (3.7e). De plus, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est choisie de façon à croitre très vite, cela implique que notre opérateur est rarement perturbé et permettra d'assurer la continuité de celui-ci. De plus, il sera utile de remarquer que $2 \leq w_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On notera également $d_n = \deg(P_n)$.

Continuité de T

Comme on l'a vu auparavant, il suffit de trouver une suite admissible $\mathbf{P}$ telle que T soit continu et Φ soit continue pour le produit défini auparavant. Dans cette optique, on dira que $\mathbf{P}$ est contrôlée par une suite de nombres positifs $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) < c_n$ et $|P_n|_1 \leq c_n$. On peut facilement se convaincre que si $\sup_{n\to\infty} c_n = \infty$ alors il existe une suite admissible contrôlée par $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On notera aussi $\|\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i e_i\|_1 = \sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$ la norme ℓ^1 sur c_{00}.

Pour obtenir (3.7c), nous aurons besoin du lemme suivant qui est essentiellement le Lemme 4.20 de [7]. Par souci d'exhaustivité, nous en donnerons tout de même une preuve quasi identique à celle de [7] :

Lemme 3.33. *On a les deux propriétés suivantes :*

$$\varepsilon_n \leq 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \tag{3.11a}$$

(3.11b) *Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $\|f_k\|_1 \leq 1$ pour tout $k < n$ alors :*

$$\|f_n\|_1 \leq 4^{\max(d_n,d_{n-1})+1}\left(\frac{|P_n|_1}{2^{b_{n-1}}} + |P_{n-1}|_1 \exp\left(-c\sqrt{b_{n-1}}\right)\right) \text{ où } c > 0 \text{ est une constante.}$$

Preuve :

(3.11a) est évident car on a remarqué auparavant que $w_n \geq 2$.
Pour (3.11b), prenons $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que pour tout $k < n$, $\|f_k\|_1 \leq 1$. Posons, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $E_j = \mathrm{Vect}\{e_0, \ldots, e_j\}$. On a clairement

$$\|T_{|E_j}\|_1 \leq \max\left(\|Te_i\|_1, i \leq j\right). \tag{3.12}$$

De plus, comme $(w_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et $w_i \geq 2$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ alors l'hypothèse faite sur les f_k combinée avec (3.12) implique que pour tout $j < b_n - 1$ et tout $x \in E_j$,

$$\|Tx\|_1 \leq w_{j+1}\|x\|_1.$$

En appliquant ceci récursivement, on obtient donc que pour tout $k \in \{1, \dots, b_n - 1\}$:

$$\|T^k e_0\|_1 \leq \prod_{i=1}^{k} w_i.$$

Remarquons que quitte à choisir par convention que le produit indexé sur un ensemble vide est égal à 1, on peut prolonger l'égalité précédente à $k = 0$ car on a supposé la base $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ normalisée.
Maintenant, nous allons pouvoir commencer à estimer $\|f_n\|_1$ en utilisant l'expression (3.10) :

$$\|f_n\|_1 \leq \frac{|P_n|_1 \prod_{i=1}^{d_n} w_i + |P_{n-1}|_1 \prod_{i=1}^{b_n-b_{n-1}+d_{n-1}} w_i}{w_{b_{n-1}+1} \cdots w_{b_n-1}}$$

On majore ensuite brutalement le terme précédent en utilisant $2 \leq w_n \leq 4$:

$$\|f_n\|_1 \leq 4^{\max(d_n, d_{n-1})+1} \left(\frac{|P_n|_1}{2^{b_n-b_{n-1}-1}} + |P_{n-1}|_1 \prod_{i=1}^{b_n-b_{n-1}-1} \frac{w_i}{w_{i+b_{n-1}}} \right)$$

Il suffit maintenant d'utiliser le fait que pour $0 \leq u < v \leq 1$, $\ln(\frac{1-v}{1-u}) \leq u - v$ pour obtenir :

$$\prod_{i=1}^{b_n-b_{n-1}-1} \frac{w_i}{w_{i+b_{n-1}}} \leq \exp\left(\sum_{i=1}^{b_n-b_{n-1}-1} \left(\frac{1}{2\sqrt{i+b_{n-1}}} - \frac{1}{2\sqrt{i}} \right) \right)$$

$$\leq \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{b_{n-1}} \frac{b_{n-1}}{(i+b_{n-1})^{\frac{3}{2}}} \right) \text{ en utilisant la relation } b_n - b_{n-1} - 1 \geq b_{n-1}$$

et le théorème des accroissements finis,

$$\leq \exp\left(-c\sqrt{b_{n-1}}\right)$$

Il suffit, pour conclure, de combiner cette dernière inégalité et l'inégalité précédente.

□

Montrons maintenant que (3.7c) est bien vérifié pour un choix de $\mathbf{P}$ adéquat.

Lemme 3.34. *Il existe une suite de contrôle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers l'infini telle que si $\mathbf{P}$ est contrôlée par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors T est continu sur c_{00} pour la topologie induite par celle sur X.*

Preuve :

Comme $b_n = (2p+1)^n$, il est clair que l'on peut choisir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$4^{u_n+1}\left(\frac{u_n}{2^{b_{n-1}}} + u_n \exp\left(-c\sqrt{b_{n-1}}\right) \right) \leq \frac{1}{2^n}.$$

De plus, comme par hypothèse **P** est contrôlée par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il suffit alors d'utiliser le résultat du Lemme 3.33 pour obtenir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|f_n\|_1 \leq \frac{1}{2^n}.$$

Maintenant pour montrer la continuité de T, on se rappelle de la façon dont il a été construit et il parait naturel de réécrire $T = R + K$ avec R qui est la partie décalage à droite pondéré par une suite bornée et K est la partie "exceptionnelle" définie par :

$$K(e_i) = \begin{cases} f_n, \text{ s'il existe } n \text{ tel que } i = b_n - 1 \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}.$$

Comme le décalage à droite est continu et que la base $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est inconditionnelle (ce qui veut dire par définition que l'opérateur de pondération par une suite bornée est continu), R est lui-même continu.
Pour la partie exceptionnelle, en utilisant l'inégalité triangulaire et le fait que la base $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est normalisée, on obtient que $\|\cdot\|_X \leq \|\cdot\|_1$ et donc $\|Ke_{b_n-1}\|_X \leq \|f_n\|_1$. On déduit de ceci et de l'inégalité $\|f_n\|_1 \leq \frac{1}{2^n}$ que la série $\sum_{i=0}^{\infty} \|Ke_i\|_X$ est convergente. Enfin, comme $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est normalisée, la suite $(e_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée et en écrivant $x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i e_i \in c_{00}$, alors on obtient la continuité de K car

$$\|K(x)\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|Ke_i\|_X \|e_i^*\| \|x\|_X \leq 2 \sup_{i\in\mathbb{N}}(\|e_i^*\|)\|x\|_X.$$

□

Construction des Φ_δ

Il nous reste maintenant à construire les formes linéaires Φ_δ vérifiant (3.7d) et (3.7e). Nous devons construire des fonctions Φ_δ, $\delta \in \{0, \ldots, 2p-1\}$ qui sont toutes continues pour le produit sur $\mathbb{K}[T]e_0$. Mais avant cela, on va se donner un moyen de vérifier la continuité pour le produit de ces fonctions par le lemme suivant tiré de [7] :

Lemme 3.35. *Soit ϕ une forme linéaire sur c_{00} et supposons que $\sum_{r,q} |\phi(e_r \cdot e_q)| < \infty$. Alors l'application $(x, y) \mapsto \phi(x \cdot y)$ est continue sur $c_{00} \times c_{00}$.*

Preuve :
On commence par écrire $x = \sum_{r=0}^{\infty} x_r e_r$ et $y = \sum_{q=0}^{\infty} y_q e_q$, en remplaçant dans la somme on obtient :

$$|\phi(x \cdot y)| \leq \sum_{r,q}^{\infty} |x_r||y_q||\phi(e_r \cdot e_q)| \leq C^2 \sum_{r,q}^{\infty} |\phi(e_r \cdot e_q)|\|x\|\|y\|$$

pour tous $x, y \in c_{00}$ et avec $C = \sup_{i\in\mathbb{N}}(\|e_i^*\|)$. D'où le lemme.

□

Nous allons maintenant construire les formes linéaires Φ_δ et pour cela, on introduit une nouvelle terminologie : on dira qu'un vecteur $x \in c_{00}$ est à support dans un ensemble $I \subset \mathbb{N}$ si $x \in \text{Vect}\{T^i e_0, i \in I\}$. Nous allons bien sûr construire les fonctions Φ_δ dans

l'objectif de pouvoir leur appliquer le Lemme 3.35. Pour cela, il nous suffit de savoir majorer $|\phi(e_r \cdot e_q)|$.
On commence donc par étudier le produit $e_r \cdot e_q$. Pour des raisons pratiques, fixons $r \leq q$. On peut alors décomposer $r = b_k + u$ et $q = b_l + v$ avec $u \in \{0, \ldots, b_{k+1} - b_k - 1\}$ et $v \in \{0, \ldots, b_{l+1} - b_l - 1\}$ pour certains entiers naturels k et l uniques. En revenant à la façon dont nous avons défini T avec les relations (3.9) et (3.8), on peut ré-exprimer :

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{1}{w_{b_k+1} \cdots w_{b_k+u}} \left(T^{b_k} - P_k(T)\right) T^u(e_0), \\ e_q &= \frac{1}{w_{b_l+1} \cdots w_{b_l+v}} \left(T^{b_l} - P_l(T)\right) T^v(e_0). \end{aligned}$$

Ainsi, pour toute forme linéaire $\phi : c_{00} \to \mathbb{K}$, on obtient la majoration suivante :

$$|\phi(e_r \cdot e_q)| \leq \frac{1}{2^{u+v}} |\phi(y_{(k,u),(l,v)})|,$$

avec $y_{(k,u),(l,v)} = (T^{b_k} - P_k(T))(T^{b_l} - P_l(T))T^{u+v}e_0$ car $w_i \geq 2$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.
Il nous faut à présent réussir à bien traiter ces termes. Toujours dans l'optique de faire converger la série du Lemme 3.35, nous allons poser pour des raisons qui paraissent probablement partiellement obscures à ce stade :

$$\Phi_\delta(T^i e_0) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = \delta \\ 0 \text{ si } i \in \{0, b_1 - 1\} \setminus \{\delta\} \\ \Phi_\delta(P_n(T)T^{i-b_n}e_0) \text{ si } i \in [b_n, \frac{3}{2}b_n[\cup [2b_n, \frac{5}{2}b_n[\\ 0 \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

On remarque que ceci définit bien Φ_δ sur c_{00} puisque $\deg(P_n) + i - b_n < i$ et ainsi $P_n(T)T^{i-b_n}e_0$ est à support dans $\{0, \cdots, i-1\}$. Pour garantir la continuité des formes linéaires Φ_δ que nous venons de définir, nous avons également besoin du lemme suivant :

Lemme 3.36. *Supposons que* $\deg(P_n) < \frac{b_n}{3}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, alors pour tout* $0 \leq k \leq l$*, on a :*

$$\Phi_\delta(y_{(k,u),(l,v)}) = 0 \text{ si } u + v < \frac{b_l}{6} \tag{3.13a}$$

$$|\Phi_\delta(y_{(k,u),(l,v)})| \leq M_l(\mathbf{P}) := \max_{0 \leq j \leq l} (1 + |P_j|_1)^2 \prod_{j=1}^{l+1} \max(1, |P_j|_1)^2. \tag{3.13b}$$

Preuve :

La preuve de (3.13a) est juste un jeu d'écriture à condition d'avoir remarqué que si $z \in c_{00}$ est à support dans $[0, \frac{b_k}{2}[\cup [b_k, \frac{3}{2}b_k[$ alors :

$$\Phi_\delta\left(\left(T^{b_k} - P_k(T)\right) z\right) = 0. \tag{3.14}$$

Supposons donc $u + v < \frac{b_l}{6}$ et donc qu'en particulier $l \geq 1$.
Dans le cas où $k = l \geq 1$, on développe les termes en l pour obtenir :

$$\begin{aligned} y_{(k,u),(l,v)} &= (T^{b_k} - P_k(T))T^{b_k+u+v}e_0 - (T^{b_k} - P_k(T))P_k(T)T^{u+v}e_0 \\ &:= (T^{b_k} - P_k(T))(z_1) - (T^{b_k} - P_k(T))(z_2). \end{aligned}$$

Alors z_1 est à support dans $[b_k, b_k + u + v] \subset [b_k, \frac{7}{6}b_k[\subset [b_k, \frac{3}{2}b_k[$ et z_2 est à support dans $[0, \deg(P_k)+u+v] \subset [0, \frac{b_k}{2}[$ car par hypothèse $\deg(P_k) \leq \frac{b_k}{3}$. On conclut grâce à la relation (3.14). Ainsi dans le cas où $k = l$, on obtient bien $\Phi_\delta(y_{(k,u),(l,v)}) = 0$.
Dans le cas où $l > k$, il suffit d'écrire :

$$y_{(k,u),(l,v)} = (T^{b_l} - P_l(T))(z),$$

avec $z = (T^{b_k} - P_k(T))T^{u+v}e_0$ qui est à support dans $[0, b_k + u + v] \subset [0, \frac{b_l}{2}[$ par définition de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Là encore on conclut grâce à la relation (3.14). Ceci termine la preuve du premier point.

Montrons maintenant (3.13b). Nous allons avoir besoin de deux petits résultats intermédiaires. Le premier est direct : si R est un polynôme alors en utilisant l'inégalité triangulaire on obtient :

$$|\Phi_\delta(R(T)e_0)| \leq |R|_1 \max_{0\leq j\leq \deg(R)} |\Phi_\delta(T^j e_0)|.$$

Le second demande un peu plus de travail pour être obtenu. Il s'énonce de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\max_{0\leq i<b_n} |\Phi_\delta(T^i e_0)| \leq \prod_{j=1}^{n-1} \max(1, |P_j|_1)^2.$$

Admettons ce résultat pour l'instant et concentrons nous sur la preuve de (3.13b). On sait que l'on peut écrire $y_{(k,u),(l,v)} = R(T)e_0$ avec $\deg(R) \leq b_k + b_l + u + v < 2b_{l+1} < b_{l+2}$ car $k \leq l$. De plus, il est clair que $|R|_1 \leq (1 + |P_l|_1)(1 + |P_k|_1)$. La conclusion du lemme se déduit facilement des deux résultats que nous venons d'énoncer.

Montrons maintenant le deuxième résultat dont nous avons laissé la preuve en suspens. En donnant par convention la valeur 1 à un produit indexé sur un ensemble vide, on voit que la relation est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. On va raisonner par récurrence, supposons donc que la relation est vraie au rang n et montrons la au rang $n + 1$. Posons $\Phi_{\delta,i} = |\Phi_\delta(T^i e_0)|$ et $K_n = \prod_{j=1}^{n-1} \max(1, |P_j|_1)^2$. Alors,

$$\begin{aligned}\max_{b_n\leq i<2b_n} \Phi_{\delta,i} &= \max_{b_n\leq i<\frac{3}{2}b_n} |\Phi_\delta(P_n(T)T^{i-b_n}e_0)| \\ &\leq |P_n|_1 \max_{0\leq j<\frac{b_n}{2}+\deg(P_n)} \Phi_{\delta,j} \\ &\leq |P_n|_1 K_n.\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\max_{2b_n\leq i<b_{n+1}} \Phi_{\delta,i} = \max_{2b_n\leq i<\frac{5}{2}b_n} \Phi_{\delta,i} \leq |P_n|_1 \max_{0\leq i<2b_n} \Phi_{\delta,i} \leq |P_n|_1^2 K_n.$$

Ainsi, $\max_{2b_n\leq i<b_{n+1}} \Phi_{\delta,i} \leq K_{n+1}$. Ce qui achève la récurrence et la preuve du lemme.

□

On va maintenant pouvoir assurer la continuité pour le produit des forme linéaires Φ_δ sous des hypothèses convenables sur $\mathbf{P}$.

Proposition 3.37. *Il existe une suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui tend vers l'infini telle que si* $\mathbf{P}$ *est contrôlée par* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, alors* $(x,y)\mapsto \Phi_\delta(x\cdot y)$ *est continue sur* $c_{00}\times c_{00}$.

Preuve :

Posons $\Lambda=\{(m,w)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}, w<b_{m+1}-b_m\}$. Alors,

$$\sum_{r,q}|\Phi_\delta(e_r\cdot e_q)|\leq \sum_{((k,u),(l,v))\in\Lambda\times\Lambda}\frac{1}{2^{u+v}}|\Phi_\delta(y_{(k,u),(l,v)})|.$$

En utilisant maintenant le Lemme 3.36, on obtient en majorant assez brutalement :

$$\begin{aligned}\sum_{r,q}|\Phi_\delta(e_r\cdot e_q)| &\leq 2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=k}^{\infty}M_l(\mathbf{P})\sum_{u+v\geq\frac{b_l}{6}}\frac{1}{2^{u+v}}\\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=k}^{\infty}M_l(\mathbf{P})\sum_{i\geq\frac{b_l}{6}}\frac{i+1}{2^{i-1}}\ \text{ car }\ \mathrm{Card}(\{(u,v)\in\mathbb{N}^2 : u+v=i\})=i+1.\end{aligned}$$

Choisissons maintenant une suite de nombres positifs $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers l'infini avec $A_n\geq 2$ et telle que :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=k}^{\infty}A_l\sum_{i\geq\frac{b_l}{6}}\frac{i+1}{2^{i-1}}<+\infty.$$

À ce stade, il suffit de choisir la suite de contrôle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de façon que $M_n(\mathbf{P})\leq A_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
On en déduit la proposition en utilisant le Lemme 3.35.

□

On peut maintenant regrouper les résultats du Lemme 3.34 et du Lemme 3.36 et l'on obtient qu'en choisissant bien notre suite de contrôle, c'est-à-dire en prenant le plus petit coefficient pour chaque terme de la suite, T est continu et les Φ_δ, $\delta\in\{0,\dots,2p-1\}$ sont continues pour le produit que l'on a défini au départ sur $\mathbb{K}[T]e_0$. Il est donc clair que Ψ vérifie (3.7d).
De plus, les formes linéaires Φ_δ ont été construites pour vérifier (3.7e) car

$$\Phi_\delta(T^i(e_0))=\begin{cases}1 \text{ si } i=\delta\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}\qquad \text{pour tout } 0\leq i\leq b_1-1=2p.$$

Maintenant, grâce au Lemme 3.34, à la Proposition 3.37 et au critère du Lemme 3.30, on obtient le Théorème 3.28.
Dans cette section, on a construit le premier exemple d'opérateur qui est supercyclique mais qui n'est pas fortement h-supercyclique pour $2\leq h\leq p$. Il est alors naturel de se demander si l'on peut trouver un exemple d'opérateur supercyclique qui n'est pas fortement p-supercyclique pour tout $p\geq 2$.

3.3.3 Un opérateur supercyclique qui n'est pas fortement n-supercyclique pour tout $n \geq 2$

L'exemple précédent d'un opérateur supercyclique qui n'est pas fortement h-supercyclique pour h fixé répond à la question de l'existence d'opérateurs fortement h-supercycliques mais pas fortement $(h+1)$-supercycliques pour le cas particulier $h = 1$. Ce résultat peut en fait être amélioré de la façon suivante :

Théorème 3.38. *Il existe un opérateur supercyclique qui n'est pas fortement h-supercyclique pour tout $h \geq 2$.*

La démonstration de ce résultat fait appel aux opérateurs construits dans la section précédente, en effet un moyen naturel de construire un opérateur qui n'est pas fortement h-supercyclique pour tout $h \geq 2$ est de le construire comme somme directe d'opérateurs qui ne sont pas fortement h-supercycliques à h fixé. C'est l'idée de la démonstration de ce théorème. Il faut de plus s'assurer de deux autres choses : d'abord que la somme directe a bien un sens mais aussi que l'opérateur construit est bien lui-même supercyclique ce qui n'est pas automatique en général et encore moins quand les opérateurs en question ne vérifient pas le critère de supercyclicité. Pour cela, il nous faudra jouer sur les paramètres qui entrent dans la construction de l'opérateur de la section précédente. Chaque opérateur qui entrera dans la somme directe aura ses propres paramètres. Il nous faut donc construire ces paramètres de façon à conserver les propriétés de l'opérateur données dans la section précédente mais aussi faire en sorte qu'ils induisent des comportements supercycliques compatibles pour tous les opérateurs entrant dans la somme directe.

Dans la première partie, nous allons construire une infinité d'opérateurs supercycliques T_p qui ne sont pas fortement h-supercycliques pour $2 \leq h \leq p$. De plus, nous voulons que ces opérateurs vérifient certaines propriétés additionnelles afin de pouvoir considérer leur somme directe en préservant la propriété de supercyclicité. Pour s'assurer de tout cela, nous devons donc modifier quelque peu la construction des opérateurs de la section précédente, en particulier le paramètre $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite admissible de polynômes $\mathbf{P}$. À partir de maintenant, nous posons $b_n = 5^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $b_0 = 0$.

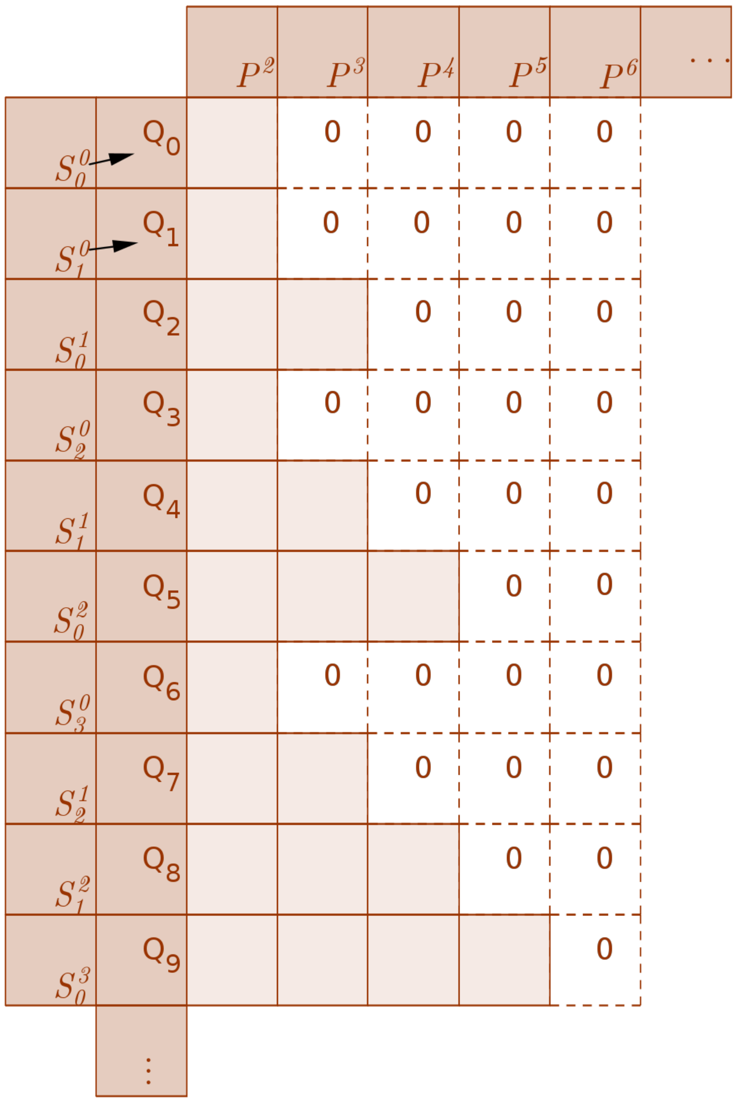
Dans une seconde partie, nous construisons l'opérateur annoncé dans le Théorème 3.38 et nous vérifions que les opérateurs construits juste avant permettent d'assurer la supercyclicité de ce dernier et qu'il n'est pas fortement h-supercyclique pour tout $h \geq 2$.

Construction d'une infinité d'opérateurs pour différents paramètres

En se donnant une infinité de suites de contrôles strictement croissantes $(u_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ et qui vérifient $\lim_{n\to+\infty} u_n^i = +\infty$ pour tout $i \geq 2$, alors il existe une énumération $(S_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\mathbf{Q}[X])^{i+1} \times \{0\}^{\mathbb{N}}$, à laquelle nous n'imposons pas d'être bijective, pour tout $i \in \mathbb{N}$ satisfaisant : pour tous $i, k, n \in \mathbb{N}$, et $0 \leq j \leq b_{i+1}$, $S_j^i(k) = 0$, $\deg(S_n^i(k)) \leq u_n^{k+2}$ et $|S_n^i(k)|_1 \leq u_n^{k+2}$. Ces énumérations sont la clé pour construire les suites admissibles $(\mathbf{P}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui entrent dans la construction de l'opérateur supercyclique. Nous détaillons la construction des suites admissibles ci-dessous :
Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \left[\frac{j(j+1)}{2}, \frac{(j+1)(j+2)}{2}\right[$, on pose :

$$Q_n = S^{n-\frac{j(j+1)}{2}}_{\frac{j(j+3)}{2}-n} \text{ et } Q_0 = S_0^0.$$

Pour tout $k \geq 2$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose également : $\mathbf{P}_n^k := Q_n(k-2)$. Ces notations sont résumées dans le tableau ci-dessous. Les cases contenant des zéros ne sont absolument pas exhaustives, il y a beaucoup de composantes nulles dans ces suites.



La construction de $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est faite suivant deux axes. D'une part tout élément de $\mathbf{Q}[X]$ doit être la k-ième composante d'un certain Q_n avec les autres composantes nulles et ceci pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est ce qui nous permet d'obtenir un opérateur T cyclique. D'autre part, pour passer de la cyclicité à la supercyclicité de T, pour tout $P \in \mathbf{Q}[X]$, on doit pouvoir trouver une infinité de Q_n contenant un nombre arbitraire de fois λP sur ses premières

composantes et des zéros ensuite et où λ et le nombre de répétitions de λP augmentent avec n.
De plus, on peut remarquer que les suites $\mathbf{P}^k$ sont admissibles et contrôlées par $(u_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $k \geq 2$. En effet, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$, $\mathbf{P}_n^k = Q_n(k-2)$ ainsi il existe $q, r \in \mathbb{N}$ avec $q, r \leq n$ tels que $\mathbf{P}_n^k = S_r^q(k-2)$. De plus, $\deg(S_r^q(k-2)) \leq u_r^k$ par définition et donc $\deg(S_r^q(k-2)) \leq u_n^k$ car $(u_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Le même argument prouve que $|\mathbf{P}_n^k|_1 \leq u_n^k$. Il reste l'admissibilité. Pour cela, on remarque d'abord que $S_0^0(i) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout $k \geq 2$, $\mathbf{P}^k$ est une énumération de $\mathbf{Q}[X]$ puisque $\mathbf{Q}[X] = \{S_n^{k-2}(k-2), n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{\mathbf{P}_n^k, n \in \mathbb{N}\}$.

Lemme 3.39. *Ces suites ont également la propriété suivante* $\mathbf{P}_j^k = 0$ *pour tous* $k \geq 2$ *et* $0 \leq j \leq 2k$.

Preuve :

Soit $k \geq 2$ et $0 \leq j \leq 2k$, alors $\mathbf{P}_j^k = Q_j(k-2) = S_r^q(k-2)$ pour certains $q, r \in \mathbb{N}$ avec $q + r \leq j$ par définition de Q et si $0 \leq r \leq b_{q+1}$, $S_r^q(k-2) = 0$.
D'autre part, si $b_{q+1} < r$, alors $b_{q+1} + q < q + r \leq j \leq 2k$, et donc $\frac{5^{q+1}+q-4}{2} \leq k - 2$. De plus, si $q \geq 1$, un petit calcul prouve que $q + 1 < \frac{5^{q+1}+q-4}{2}$. On a ainsi $q + 1 < k - 2$, ce qui aboutit à $S_r^q(k-2) = 0$ puisque $S_r^q \in (\mathbf{Q}[X])^{q+1} \times \{0\}^{\mathbb{N}}$.
Il reste à considérer le cas où $q = 0$ et $5 = b_1 < r$ mais on sait que si $k-2 > 1 \Leftrightarrow k \neq 2$ alors $S_r^q(k-2) = 0$. De plus, si $k = 2$, alors $q \neq 0$ car sinon l'inégalité $5 = b_1 < p \leq j \leq 2k = 4$ est contredite.
Ceci termine la preuve du lemme.

$\square$

On suppose maintenant que X est un espace de Banach muni d'une base inconditionnelle normalisée $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pour laquelle l'opérateur de décalage à droite est continu. Pour tout $p \geq 2$, on pose $X_p := X$, $(e_i^p)_{i\in\mathbb{N}} := (e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la base inconditionnelle de X_p et on défini un opérateur T_p sur X_p de la même façon que dans la section précédente mais avec les paramètres p et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les suites admissibles $\mathbf{P}^p$ construites ci-dessus. Ces changements de paramètres ne perturbent pas (3.7a), (3.7b) et (3.7c) qui restent vérifiées, ainsi T_p est bien défini et continu sur X_p. De plus, il est apparent dans la preuve du Lemme 3.34 que $\|T_p\| \leq \sup(4C_u^p\|F_p\|, 2C_u^p)$ où C_u^p est la constante d'inconditionnalité de $(e_i^p)_{i\in\mathbb{N}}$ et F_p est l'opérateur de décalage à droite sur X_p.
La partie délicate de la construction est la définition des formes linéaires Φ_δ car nous avons eu besoin de la condition $b_1 > 2p$ pour construire ces fonctionnelles et vérifier (3.7e). Dans le cas présent nous avons choisi $b_n = 5^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc nous avons apporté également des changements sur les suites admissibles $\mathbf{P}^p$ de façon à ce que l'on puisse toujours construire les fonctionnelles Φ_δ en mettant un nombre suffisant de zéros au début de chaque suite pour compenser le fait que $b_1 < 2p$. Pour tout $\delta \in \{0, \ldots, 2p-1\}$, on définit :

$$\Phi_\delta(T^i e_0) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = \delta \\ 0 \text{ si } i \in \{0, b_m - 1\} \setminus \{\delta\} \\ \Phi_\delta(P_n(T)T^{i-b_n}e_0) \text{ si } i \in [b_n, \frac{3}{2}b_n[\cup[2b_n, \frac{5}{2}b_n[\text{ pour } n \geq m \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

où $m \in \mathbb{N}^*$ est choisi de sorte que $b_{m-1} < 2p < b_m$.
Ainsi, Φ_δ est bien définie grâce au Lemme 3.39 et les propriétés (3.7e) et (3.7d) sont également satisfaites. Donc modulo quelques changements sur les paramètres donnés dans la section précédente, T_p est supercyclique mais pas fortement h-supercyclique pour $1 < h \leq p$ sur X_p, pour un choix approprié de suites de contrôles strictement croissantes.

Construction de l'opérateur supercyclique n'étant pas fortement h-supercyclique pour $h \geq 2$

Comme nous l'avions annoncé précédemment, on définit $T = \oplus_{\ell_2} T_p$ un opérateur sur $B = \oplus_{\ell_2} X_p$ pour $p \geq 2$. En considérant d'une part la partie décalage pondéré à droite R et d'autre part la perturbation K, on obtient :

$$\|T\| \leq \|R\| + \|K\| \leq 4 \sup_{p\geq 2}(C_u^p \|F_p\|) + 2 \sup_{p \geq 2}(C_u^p) < +\infty$$

car pour tout $p \geq 2$, $X_p = X$. Ainsi, T est continu sur B et n'est pas fortement n-supercyclique pour $n \geq 2$.

Il nous suffit à présent de montrer que T est supercyclique. Pour cela, nous allons montrer que T vérifie les deux conditions suivantes :

$$\{(0, \cdots, 0, e_i^p, 0, \cdots), i \in \mathbb{N}, p \geq 2\} \subset \overline{\mathrm{Vect}\left\{T^i\left(\oplus_{\ell_2} \frac{e_0^p}{p}\right), i \in \mathbb{N}\right\}}, \tag{3.15a}$$

$$\mathrm{Vect}\left\{T^i\left(\oplus_{\ell_2} \frac{e_0^p}{p}\right), i \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \overline{\left\{\lambda T^i\left(\oplus_{\ell_2} \frac{e_0^p}{p}\right), i \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K}\right\}}. \tag{3.15b}$$

La condition (3.15b) est bien vérifiée avec notre construction de suites admissibles. En effet, il suffit de vérifier (3.15b) pour $\mathrm{Vect}_{\mathbf{Q}}\left\{T^i\left(\oplus \frac{e_0^p}{p}\right), i \in \mathbb{N}\right\}$.
Prenons donc $P \in \mathbf{Q}[X]$, alors par définition de la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe trois suites d'entiers strictement croissantes $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$,$(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout k,

$$Q_{n_k} = \left(\underbrace{\lambda_k P, \ldots, \lambda_k P}_{m_k \text{ fois}}, 0, \cdots\right).$$

On peut ainsi exprimer

$$T^{b_{n_k}}\left(\oplus_{\ell_2} \frac{e_0^p}{p}\right) = \left(\lambda_k P(T)\left(\frac{e_0^2}{2}\right) + \frac{e_{b_{n_k}}^2}{2}, \ldots, \lambda_k P(T)\left(\frac{e_0^{m_k+1}}{m_k+1}\right) + \frac{e_{b_{n_k}}^{m_k+1}}{m_k+1}, \frac{e_{b_{n_k}}^{m_k+2}}{m_k+2}, \cdots\right).$$

Par conséquent, on évalue

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{1}{\lambda_k} T^{b_{n_k}}\left(\oplus_{\ell_2} \frac{e_0^p}{p}\right) - P(T)\left(\oplus_{\ell_2} \frac{e_0^p}{p}\right)\right\|_{\ell_2} \\ &= \left\|\left(\frac{e_{b_{n_k}}^2}{2\lambda_k}, \ldots, \frac{e_{b_{n_k}}^{m_k+1}}{(m_k+1)\lambda_k}, \frac{e_{b_{n_k}}^{m_k+2}}{(m_k+2)\lambda_k} - P(T)\left(\frac{e_0^{m_k+2}}{m_k+2}\right), \cdots\right)\right\|_{\ell_2} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

D'où (3.15b).

On s'intéresse maintenant à (3.15a).
Soient $i \in \mathbb{N}$ et $q \geq 2$. La définition de la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la supercyclicité de T_p impliquent qu'il existe une suite d'entiers strictement croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$Q_{n_k} = (0, \dots, 0, P_k, 0, \dots)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ où P_k est un polynôme tel que :

$$P_k(T)e_0^q = \lambda_k e_i^q + \varepsilon_k,$$

où $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante de réels positifs tendant vers $+\infty$ et $\|\varepsilon_k\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On obtient alors,

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{q}{\lambda_k} T^{b_{n_k}} \left(\oplus_{\ell_2} \frac{e_0^p}{p} \right) - (0, \dots, 0, e_i^q, 0, \dots) \right\|_{\ell_2} \\
&= \left\| \left(\frac{q e_{b_{n_k}}^2}{2\lambda_k}, \dots, \frac{q e_{b_{n_k}}^{q-1}}{(q-1)\lambda_k}, \frac{e_{b_{n_k}}^q}{\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k} P_k(T)\left(e_0^q\right) - e_i^q, \frac{q e_{b_{n_k}}^{q+1}}{(q+1)\lambda_k}, \dots \right) \right\|_{\ell_2} \\
&= \left\| \left(\frac{q e_{b_{n_k}}^2}{2\lambda_k}, \dots, \frac{q e_{b_{n_k}}^{q-1}}{(q-1)\lambda_k}, \frac{e_{b_{n_k}}^q}{\lambda_k} + \varepsilon_k, \frac{q e_{b_{n_k}}^{q+1}}{(q+1)\lambda_k}, \dots \right) \right\|_{\ell_2} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Ceci prouve (3.15a). Donc T est supercyclique sur X mais n'est jamais fortement h-supercyclique pour $h \geq 2$. Ceci termine la construction de l'opérateur du Théorème 3.38.

Question. Un opérateur fortement n-supercyclique est-il toujours fortement $(n+1)$-supercyclique pour $n \geq 2$?

Question. Si T est fortement n-supercyclique pour tout $n \geq 1$, T vérifie-t-il le critère de supercyclicité ?

4 Co-forte n-supercyclicité

4.1 Définition et propriétés

Les opérateurs fortement n-supercycliques sont en quelque sorte des opérateurs qui ont la propriété d'être universels sur l'ensemble des Grassmanniennes de dimension n d'un espace de Banach. De la même façon, il n'est pas absurde de se demander si l'on peut définir une notion d'universalité pour des opérateurs sur des ensembles de sous-espaces de dimension plus grande. Typiquement, l'idée la plus naturelle est de regarder ce qu'il se passe si au lieu de s'intéresser aux itérés d'un sous-espace de dimension n, on considère les itérés d'un sous-espace de codimension n. Bien sûr, l'étude s'annonce plus délicate puisque la codimension est "moins stable" que la dimension. Ainsi, lorsqu'on applique un opérateur sur un sous-espace de dimension finie, on ne peut craindre qu'une chute de la dimension mais il en est autrement pour la codimension. En effet, l'action d'un opérateur sur un sous-espace de codimension finie peut faire changer sa codimension soit en l'augmentant soit en la diminuant.

De plus, si l'on veut définir une notion analogue à la forte n-supercyclicité, il nous faut au préalable définir l'ensemble sur lequel nous allons étudier les opérateurs en question.

Définition 4.1. Soit X un espace de Banach et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle n-ième co-Grassmannienne de X, notée $\mathbb{P}_n^{co}(X)$, l'ensemble de tous les sous-espaces de codimension n dans X. On note X_n^* l'ensemble des n-uplets de vecteurs de X^* qui forment une famille indépendante et on munit cet ensemble de la topologie induite par celle de X^{*n}. On munit l'ensemble $\mathbb{P}_n^{co}(X)$ de la topologie la moins fine qui rende les applications $\Pi_n : X_n^* \to \mathbb{P}_n^{co}(X)$ avec $\Pi_n(x_1^*, \dots, x_n^*) = \cap_{i=1}^n \ker(x_i^*)$ continues et ouvertes.

Avec cette définition de la n-ième co-Grassmannienne, il est maintenant possible de définir une notion d'universalité des opérateurs sur cet espace.

Définition 4.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et T un opérateur linéaire borné sur X. Un sous-espace vectoriel M de codimension n est dit co-fortement n-supercyclique pour T si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\overline{T^k(M)}$ est de codimension n et si l'ensemble $\left\{\overline{T^k(M)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ est dense dans $\mathbb{P}_n^{co}(X)$. Dans ce cas, l'opérateur T est dit co-fortement n-supercyclique.

Remarque 4.3. On peut commencer par remarquer que ces opérateurs n'apparaissent pas en dimension finie d'après le Théorème 2.34 puisque comme on l'a vu dans la Proposition 2.24, si X est de dimension finie n, un opérateur T est fortement k-supercyclique si et seulement si T^{-1*} est co-fortement $(n-k)$-supercyclique.

Remarque 4.4. Il est important de noter que l'on ne peut pas se passer de l'adhérence $\overline{T^k(M)}$ dans la définition précédente. En effet, si l'on ne considère pas l'adhérence de

$T^k(M)$, il est possible que ce sous-espace ne soit pas fermé. Or pour parler de sa codimension, nous avons besoin que ce dernier soit fermé. C'est encore un problème que l'on n'a pas lorsqu'on étudie la forte n-supercyclicité et donc l'orbite de sous-espaces de dimension finie.

Après avoir défini rigoureusement la co-forte n-supercyclicité, certaines conditions nécessaires pour l'existence de tels opérateurs en découlent. Par exemple, on peut remarquer que l'existence d'opérateurs co-fortement n-supercycliques dépend de la séparabilité de l'espace dual. La proposition suivante donne un énoncé plus précis de ce fait.

Proposition 4.5. *Si T est un opérateur co-fortement n-supercyclique sur un espace de Banach X, alors X^* est séparable.*

Preuve :
Il est clair que la propriété sera démontrée si l'on montre que X^{*n} est séparable. Comme T est co-fortement n-supercyclique, il existe un sous-espace vectoriel $L = \cap_{i=1}^n \ker(x_i^*)$ de codimension n tel que $\left\{\overline{T^k(L)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ est dense dans $\mathbb{P}_n^{co}(X)$. Ceci est équivalent à la densité de $\cup_{k=0}^{+\infty}\Pi_n^{-1}\left(\overline{T^k(L)}\right)$ dans l'espace produit X^{*n}. Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\Pi_n^{-1}\left(\overline{T^k(L)}\right)$ est contenu dans l'espace vectoriel des n-uplets de formes linéaires sur X dont le noyau contient $\overline{T^k\left(\cap_{i=1}^n \ker(x_i^*)\right)}$. Mais comme par définition $\overline{T^k\left(\cap_{i=1}^n \ker(x_i^*)\right)}$ est de codimension n, il est clair que cet espace vectoriel de n-uplets de formes linéaires est de dimension finie n^2. Ainsi $\cup_{k=0}^{+\infty}\Pi_n^{-1}\left(\overline{T^k(L)}\right)$ est dense dans X^{*n} et est contenu dans une union dénombrable de sous-espaces vectoriels de dimension finie. La séparabilité de X^{*n} découle directement de cette dernière observation.

□

Remarque 4.6. Il est bien connu que les notions d'hypercyclicité, supercyclicité et n-supercyclicité nécessitent que l'espace soit séparable pour exister. De plus, si l'espace X est un espace de Banach de dimension infinie, c'est même une condition nécessaire et suffisante. La proposition précédente montre que pour la co-forte n-supercyclicité, la séparabilité de l'espace X est nécessaire mais elle n'est pas suffisante. On supposera donc à partir de maintenant que l'espace X sur lequel on travaille est séparable.

Grâce à la proposition précédente, on peut d'ores et déjà exhiber des espaces qui n'admettent pas d'opérateurs co-fortement n-supercycliques.

Corollaire 4.7. *Il n'existe pas d'opérateur co-fortement n-supercyclique sur $\ell^1(\mathbb{N})$, $\ell^1(\mathbb{Z})$, $\ell^\infty(\mathbb{N})$ et $\ell^\infty(\mathbb{Z})$.*

Nous donnons maintenant un lemme qui nous servira dans la preuve du lemme suivant.

Lemme 4.8. *Si X est un espace de Banach, E un sous-espace dense de X et F un sous-espace fermé de codimension finie n, alors $E \cap F$ est dense dans F.*

Preuve :
Comme F est de codimension finie et puisque E est dense, on peut décomposer $X = F \oplus G$ où G est un sous-espace de dimension n contenu dans E. Notons, P_F (respectivement P_G) la projection sur F parallèlement à G (respectivement G parallèlement à F). Prenons ensuite un élément $x \in F$ alors, par densité de E dans X, il existe une

suite d'éléments $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ contenue dans E qui converge vers x. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$ on décompose $x_p = P_F(x_p) + P_G(x_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} x \in F$. Par conséquent, la continuité de la projection P_G implique $P_G(x_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} P_G(x)$. Ainsi

$$x_p - P_G(x_p) = P_F(x_p) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} x.$$

La suite $(P_F(x_p))_{p\in\mathbb{N}}$ est donc une suite d'éléments de $F \cap E$ qui converge vers x. On en déduit la densité de $F \cap E$ dans F.

□

L'étude de tels opérateurs parait difficile car il ne semble pas forcément aisé d'exprimer $\overline{T^k(\cap_{i=1}^n \ker(x_i^*))}$ pour $k \in \mathbb{N}$ de façon maniable. Cependant, même dans le cas où l'opérateur est non-borné, on peut donner une écriture plus maniable de cet ensemble grâce au lemme suivant.

Lemme 4.9. *Soit T un opérateur (éventuellement) non-borné tel que $\mathcal{D}(T^\infty)$ est dense sur un espace de Banach séparable X. Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1^*, \ldots, a_n^* \in \mathcal{D}(T^{*k})$, alors*

$$\overline{T^{-k}(\cap_{i=1}^n \ker(a_i^*))} = \cap_{i=1}^n \ker(T^{*k}(a_i^*)).$$

Preuve :
On remarque tout d'abord qu'en appliquant le Lemme 4.8 avec $E = \mathcal{D}(T^\infty)$ et $F = \cap_{i=1}^n \ker(a_i^*)$, on obtient que $\mathcal{D}(T^\infty) \bigcap \cap_{i=1}^n \ker(a_i^*)$ est dense dans $\cap_{i=1}^n \ker(a_i^*)$. En particulier, comme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $\mathcal{D}(T^\infty) \subset \mathcal{D}(T^k)$, on sait également que $\mathcal{D}(T^\infty) \bigcap \cap_{i=1}^n \ker(a_i^*)$ est dense dans $\cap_{i=1}^n \ker(a_i^*)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Commençons par montrer l'inclusion $\cap_{i=1}^n \ker(T^{*k}(a_i^*)) \subseteq \overline{T^{-k}(\cap_{i=1}^n \ker(a_i^*))}$.
Choisissons tout d'abord $x \in \cap_{i=1}^n \ker(T^{*k}(a_i^*)) \cap \mathcal{D}(T^k)$. Alors, par définition pour tout $1 \leq i \leq n$, $0 = \langle T^{*k}(a_i^*), x\rangle = \langle a_i^*, T^k(x)\rangle$ et $T^k(x) \in \cap_{i=1}^n \ker(a_i^*)$ c'est-à-dire $x \in T^{-k}(\cap_{i=1}^n \ker(a_i^*))$. Supposons maintenant que $x \in \cap_{i=1}^n \ker(T^{*k}(a_i^*))$ alors il existe une suite de points de $\cap_{i=1}^n \ker(T^{*k}(a_i^*)) \cap \mathcal{D}(T^k)$ qui converge vers x, on peut appliquer ce qui précède à chacun de ces points et on conclut que chacun de ces points appartient à $T^{-k}(\cap_{i=1}^n \ker(a_i^*))$, ainsi $x \in \overline{T^{-k}(\cap_{i=1}^n \ker(a_i^*))}$.
Pour l'inclusion inverse, on raisonne de la même façon. Soit $x \in \overline{T^{-k}(\cap_{i=1}^n \ker(a_i^*))}$, alors il existe une suite de vecteurs $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $T^{-k}\left(\cap_{i=1}^n \ker(a_i^*)\right)$ qui converge vers x. On a donc

$$T^k(x_p) \in \cap_{i=1}^n \ker(a_i^*)$$

puis

$$0 = \langle a_i^*, T^k(x_p)\rangle = \langle T^{*k}(a_i^*), x_p\rangle$$

et donc

$$x_p \in \cap_{i=1}^n \ker\left(T^{*k}(a_i^*)\right).$$

Comme $\cap_{i=1}^n \ker\left(T^{*k}(a_i^*)\right)$ est fermé, on conclut grâce à la convergence de $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ vers x.

□

Remarque 4.10. Le lemme ci dessus est un outil clé pour l'étude des opérateurs co-fortement n-supercycliques car il permet de passer d'une propriété de densité de T sur la n-ième co-Grassmannienne à des propriétés de densité vis-à-vis de l'adjoint de l'opérateur inverse sur l'espace X^{*n}. On peut en outre remarquer que si l'opérateur T du lemme précédent est borné alors l'adhérence est inutile car $T^{-k}(\cap_{i=1}^{n}\ker(a_i^*)) = \cap_{i=1}^{n}\ker(T^{*k}(a_i^*))$ est fermé.

À l'aide du lemme précédent, sous une condition d'inversibilité de l'opérateur, on peut déduire une caractérisation de la co-forte n-supercyclicité.

Proposition 4.11. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit T un opérateur borné inversible sur un espace de Banach séparable X. Alors T est co-fortement n-supercyclique sur X si et seulement si T^{-1*} est fortement n-supercyclique sur X^*.*

Preuve :
Supposons que T est co-fortement n-supercyclique. Alors il existe $(x_1^*, \ldots, x_n^*) \in X_n^*$ tel que $\cup_{k=0}^{+\infty}\overline{T^k\left(\cap_{i=1}^{n}\ker\left(x_i^*\right)\right)}$ est dense dans $\mathbb{P}_n^{co}(X)$. Ainsi, grâce au Lemme 4.9, on remarque que

$$\Pi_n^{-1}\left(\cup_{k=0}^{+\infty}\overline{T^k\left(\cap_{i=1}^{n}\ker\left(x_i^*\right)\right)}\right) = \Pi_n^{-1}\left(\cup_{k=0}^{+\infty}T^k\left(\cap_{i=1}^{n}\ker\left(x_i^*\right)\right)\right) = \cup_{k=0}^{+\infty}\Pi_n^{-1}\left(\cap_{i=1}^{n}\ker\left(T^{-k*}x_i^*\right)\right)$$

est dense dans X_n^*. Or en utilisant plusieurs fois le Lemme 4.9, on obtient

$$\begin{aligned}\cup_{k=0}^{+\infty}\pi_n\left(\Pi_n^{-1}\left(\cap_{i=1}^{n}\ker\left(T^{-k*}x_i^*\right)\right)\right) &= \cup_{k=0}^{+\infty}\left\{x^* \in X^* : \cap_{i=1}^{n}\ker\left(T^{-k*}\left(x_i^*\right)\right) \subset \ker(x^*)\right\} \\ &= \cup_{k=0}^{+\infty}\left\{x^* \in X^* : \cap_{i=1}^{n}\ker\left(x_i^*\right) \subset \ker\left(T^{k*}\left(x^*\right)\right)\right\} \\ &= \cup_{k=0}^{+\infty}T^{-k*}\left(\left\{x^* \in X^* : \cap_{i=1}^{n}\ker\left(x_i^*\right) \subset \ker\left(x^*\right)\right\}\right).\end{aligned}$$

De plus, il est clair que $\left\{x^* \in X^* : \cap_{i=1}^{n}\ker\left(T^{-k*}\left(x_i^*\right)\right) \subset \ker\left(x^*\right)\right\}$ est un sous-espace vectoriel de X^* de dimension n et la densité est préservée par π_n. Donc T^{-1*} est fortement n-supercyclique sur X^*.

Si l'on suppose à présent que T^{-1*} est fortement n-supercyclique, alors il existe $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ tels que $\cup_{k=0}^{+\infty}T^{-k*}\left(\mathrm{Vect}\left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right)\right)$ est dense dans $\mathbb{P}_n(X^*)$. On considère alors l'image réciproque de cet ensemble par la projection π_n ainsi,

$$\pi_n^{-1}\left(\cup_{k=0}^{+\infty}T^{-k*}\left(\mathrm{Vect}\left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right)\right)\right) = \cup_{k=0}^{+\infty}\pi_n^{-1}\left(\mathrm{Vect}\left(T^{-k*}x_1^*, \ldots, T^{-k*}x_n^*\right)\right)$$

est dense dans X_n^*. Il suffit alors de considérer l'image par Π_n de ce dernier ensemble et de faire un petit calcul pour remarquer que

$$\cup_{k=0}^{+\infty}\Pi_n\left(\pi_n^{-1}\left(\mathrm{Vect}\left(T^{-k*}x_1^*, \ldots, T^{-k*}x_n^*\right)\right)\right) = \cup_{k=0}^{+\infty}\cap_{i=1}^{n}\ker\left(T^{-k*}x_i^*\right)$$

est encore dense dans $\mathbb{P}_n^{co}(X)$. Enfin, on utilise une fois de plus le Lemme 4.9 pour conclure que $\cap_{i=1}^{n}\ker\left(x_i^*\right)$ est un sous-espace co-fortement n-supercyclique pour T sur X.

□

On peut déduire de cette proposition le corollaire suivant qui assure la co-forte n-supercyclicité d'un opérateur à condition d'avoir une condition forte de supercyclicité sur l'opérateur inverse de son dual.

Corollaire 4.12. *Soit T un opérateur linéaire borné inversible sur un espace de Banach séparable X. Si $\left(T^{-1}\right)^*$ vérifie le critère de supercyclicité sur X^* alors T est co-fortement n-supercyclique pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

Ce corollaire admet lui-même un corollaire intéressant qui complète la Remarque 4.6 donnée au début de ce chapitre.

Corollaire 4.13. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout espace de Banach séparable de dimension infinie X dont le dual X^* est séparable, il existe un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ qui est co-fortement n-supercyclique.*

Preuve :
On sait que sur tout espace de Banach séparable de dimension infinie, il existe un opérateur faiblement mélangeant que l'on peut supposer inversible, c'est donc en particulier le cas pour l'espace X^*. Ainsi, cet opérateur vérifie le critère d'hypercyclicité sur X^*, par conséquent il vérifie aussi le critère de supercyclicité. On conclut alors grâce à la Proposition 4.12.

□

Si l'on suppose en plus que notre espace est réflexif, alors on déduit de la Proposition 4.11 un résultat dual.

Corollaire 4.14. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit T un opérateur inversible sur un espace de Banach réflexif X. Alors T est fortement n-supercyclique sur X si et seulement si T^{-1*} est co-fortement n-supercyclique sur X^*.*

Les résultats ci-dessus permettent de construire des opérateurs co-fortement n-supercycliques à partir d'opérateurs fortement n-supercycliques. En particulier, ils permettent de transférer certaines propriétés du cadre des opérateurs fortement n-supercycliques vers celui des opérateurs co-fortement n-supercycliques. En particulier, on peut construire un opérateur dont les indices de co-forte supercyclicité forment un intervalle des entiers naturels infini à droite.

Exemple 4.15. Soit S un opérateur inversible vérifiant le critère d'hypercyclicité sur un espace de Banach réflexif Y et $n \geq 3$. Alors $T = Id \oplus S^{-1*}$ est co-fortement m-supercyclique sur $X = \mathbb{K}^n \oplus Y^*$ si $m \geq n$ mais ne l'est pas si $m < n$.

Preuve :
Il suffit d'appliquer le Corollaire 4.14 au contre-exemple 3.22 pour un opérateur S inversible.

□

La proposition suivante est un critère de non co-forte n-supercyclicité dont la condition porte sur la dimension du noyau d'un opérateur. Cette proposition simple nous permettra d'écarter un grand nombre de candidats potentiels à la co-forte n-supercyclicité.

Proposition 4.16. *Soient T un opérateur linéaire sur X pour lequel il existe $n, K \in \mathbb{N}^*$ vérifiant* $\dim\left(\ker\left(T^K\right)\right) \geq n+1$. *Alors T n'est pas co-fortement n-supercyclique.*

Preuve :

Supposons qu'il existe $K \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dim\left(\ker\left(T^K\right)\right) \geq n+1$. Nous allons montrer que les itérés d'un sous-espace de codimension n ne sont pas des sous-espaces de codimension n sauf s'ils sont constants à partir d'un certain rang. Fixons alors $(x_1^*, \ldots, x_n^*) \in X_n^*$ et considérons le sous-espace de codimension n défini par $E = \cap_{i=1}^n \ker(x_i^*)$. On peut exprimer les itérés de E de la façon suivante :

$$T^n(E) = \{x \in X : T^{-n}(\{x\}) \cap E \neq \emptyset\}.$$

Si l'on suppose que $\mathrm{Codim}(\overline{T^K(X)}) < n$, alors pour tout $x = T^K(y) \in T^K(X)$, on a

$$y + \ker(T^K) \subset T^{-K}(\{x\}).$$

Ainsi, $T^{-K}(\{x\})$ contient un sous-espace affine de dimension au moins $n+1$. D'où, comme E est de codimension n, on déduit que pour tout $x \in T^K(X)$,

$$T^{-K}(\{x\}) \cap E \neq \emptyset.$$

On obtient que $T^K(X) = T^K(E)$ et donc $\overline{T^K(X)} = \overline{T^K(E)}$ est de codimension strictement inférieure à n par hypothèse.

Dans le cas où $\mathrm{Codim}(\overline{T^K(X)}) \geq n$, il existe un sous-espace F de codimension n qui contient $\overline{T^K(E)}$. On a alors deux alternatives : soit il existe $i \geq K$ tel que la codimension de $\overline{T^i(E)}$ est strictement plus grande que n ; soit pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\overline{T^i(E)} = F$. Il est clair que dans les deux cas T n'est pas co-fortement n-supercyclique.

□

De la proposition précédente, on peut déduire le corollaire suivant qui est assez surprenant car il va à l'encontre des résultats habituels de dynamique linéaire. En effet, comme l'ont montré Bermùdez, Bonilla et Peris dans [8], si un opérateur est d'image dense et si son noyau généralisé est aussi dense, alors l'opérateur en question vérifie le critère de supercyclicité. Nous allons voir que le cas des opérateurs co-fortement n-supercycliques est tout autre.

Corollaire 4.17. *Soit T un opérateur linéaire sur X tel que $\cup_{i=1}^{+\infty} \ker(T^i)$ est dense dans X. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T n'est pas co-fortement n-supercyclique.*

Preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $\cup_{i=1}^{+\infty} \ker(T^i)$ est dense dans X, alors il existe $K \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dim\left(\ker\left(T^K\right)\right) \geq n+1$ et la proposition précédente prouve le corollaire.

□

On peut par exemple appliquer ce corollaire à la classe des décalages pondérés d'où l'on déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 4.18. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et B_w un décalage à gauche pondéré unilatéral sur $\ell^p(\mathbb{N})$. Alors B_w n'est pas co-fortement n-supercyclique.*

Nous avons introduit la notion d'opérateurs co-fortement n-supercycliques en faisant un parallèle avec la définition des opérateurs fortement n-supercycliques. En effet, nous avons directement généralisé cette définition à des espaces qui ne sont plus de dimension finie mais de codimension finie. Dans ce contexte, il serait agréable d'obtenir des résultats de densité semblables à ceux que l'on connait pour le cas des opérateurs fortement n-supercycliques. Pour obtenir un résultat dans ce sens, nous allons devoir trouver des systèmes qui sont presque des systèmes biorthogonaux mais qui sont construits de façon à engendrer un sous-espace fixé du dual. Il est bien connu maintenant depuis les travaux d'Enflo qu'il existe des espaces de Banach séparables qui n'admettent pas de bases de Schauder. De gros efforts ont alors été développés pour introduire des méthodes alternatives et les systèmes biorthogonaux sont une de ces méthodes. Nous aurons aussi besoin d'avoir un contrôle assez fin de la norme des éléments du système quitte à perdre un peu ailleurs. Ceci rappelle un théorème dû à Ovsepian et Pełczyński qui assurent l'existence d'un système biorthogonal fondamental et total sur tout espace de Banach et qui en plus est contrôlé en norme, cependant ce théorème ne permet pas de choisir le système de façon à ce qu'une partie des vecteurs contenus dans le dual engendrent un sous-espace prédéfini. Dans notre cas, nous n'aurons besoin que d'un système avec un nombre fini de point, c'est ce qui nous permettra d'ailleurs de choisir notre système de façon à ce que les éléments du dual engendrent un sous-espace prédéfini.

Lemme 4.19. *Soient X un espace de Banach séparable, F un sous espace de dimension finie N du dual X^* et $\varepsilon > 0$. Alors il existe un système $(\{x_n\}_{n=1}^N, \{x_n^*\}_{n=1}^N)$ de vecteurs de X et F vérifiant :*

a) $\frac{1}{A(N)} \leq \|x_n^*\|, \|x_n\| \leq A(N)$,

b) $1-\varepsilon \leq |x_n^*(x_n)| \leq 1+\varepsilon$,

c) $|x_n^*(x_m)| \leq \varepsilon$ *pour* $n \neq m$,

d) *Vect*$(x_n^*, 1 \leq n \leq N) = F$.

Preuve :

D'après le Théorème de John, comme F est un sous-espace de dimension N de X^*, il existe un isomorphisme $T : (F, \|\cdot\|_{X^*}) \to \ell_N^2$ avec $\|T\|, \|T^{-1}\| \leq C(N)$. Notons $\{e_1, \ldots, e_N\}$ la base canonique de ℓ_N^2 et posons

$$x_i^* = T^{-1}(e_i) \in F \text{ et } z_i = T^*(e_i^*) \in F^*.$$

Il est clair que pour ce choix, la propriété (d) est vérifiée. De plus, $\|x_i^*\| \leq \|T^{-1}\| \leq A(N)$ et $1 = \|T(x_i^*)\| \leq \|T\|\|x_i^*\|$. Ainsi, $\frac{1}{A(N)} \leq \|x_i^*\| \leq A(N)$. On prolonge z_i en une forme linéaire sur X^* par le théorème de Hahn-Banach et l'on garde la même notation pour le prolongement obtenu $z_i \in X^{**}$. Par le théorème de Goldstine, pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe une suite de vecteurs $(z_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$f(z_i^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z_i(f)$$

pour tout $f \in X^*$. En particulier, il existe un indice $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq m$ et tout $1 \leq i, j \leq N$,

$$|x_j^*(z_i^n) - z_i(x_j^*)| < \varepsilon.$$

Or par construction,

$$z_i(x_j^*) = e_i^*(T(x_j^*)) = e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}.$$

Ainsi les propriétés (b) et (c) sont satisfaites. On vérifie ensuite la propriété (a) pour x_i de la même façon que nous l'avons fait pour x_i^*. On a donc construit le système annoncé.

$\square$

Ce lemme nous sera utile pour montrer la proposition suivante. Nous aurons également besoin d'un second lemme qui pour étudie le comportement asymptotique d'une suite de vecteurs soumis à certaines contraintes. Dans tout ce qui suit, nous notons $\|\cdot\|_\infty$ la norme du suprémum sur le module des coefficients.

Lemme 4.20. *Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $(\Lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices carrées inversibles de taille p et $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de taille p et $(\Theta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs positifs de taille p vérifiant $\Theta_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0_p$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|\Lambda_k^{-1}\|_\infty \leq K$ où $K > 0$ ne dépend pas de k et que pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$|\Lambda_k A_k| \leq \Theta_k,$$

alors

$$\|A_k\|_\infty \leq pK\|\Theta_k\|_\infty \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve :

Dans ce qui suit les inégalités entre vecteurs sont bien entendu des inégalités termes à termes.

On commence par ré-exprimer la condition $|\Lambda_k A_k| \leq \Theta_k$ sous la forme

$$-\Theta_k \leq \Lambda_k A_k \leq \Theta_k.$$

On reconnait alors un système d'inéquations linéaires ayant pour variables les composantes de A_k. De plus, comme Λ_k est inversible pour tout $k \in \mathbb{N}$, il est bien connu que les solutions d'un tel système forment un polytope et que la (ou les) solution(s) maximale(s) pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ est (sont) atteinte(s) en un (ou plusieurs) sommet(s) de celui-ci. Plus précisément, si X_k est une solution maximale pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, alors il existe $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq p} \in \{-1, +1\}^p$ tel que

$$\Lambda_k X_k = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \Theta_k(1) \\ \vdots \\ \varepsilon_p \Theta_k(p) \end{pmatrix}.$$

Ainsi en inversant Λ_k et en prenant la norme infinie, on obtient

$$\begin{aligned} \|X_k\|_\infty &= \left\| \Lambda_k^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \Theta_k(1) \\ \vdots \\ \varepsilon_p \Theta_k(p) \end{pmatrix} \right\|_\infty \\ &\leq p \left\|\Lambda_k^{-1}\right\|_\infty \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \Theta_k(1) \\ \vdots \\ \varepsilon_p \Theta_k(p) \end{pmatrix} \right\|_\infty \\ &\leq pK \left\|\Theta_k\right\|_\infty \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Or comme X_k est une solution maximale pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, on obtient la convergence souhaitée

$$\|A_k\|_\infty \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Nous avons souligné précédemment que les opérateurs co-fortement n-supercycliques sont construits sur la même idée que les opérateurs fortement n-supercycliques. Cependant, il est difficile de comparer, au niveau de la construction, les topologies que l'on a mises sur la Grassmannienne et sur la co-Grassmannienne $\mathbb{P}_n^{co}(X)$. En effet, ces deux topologies sont construites de la manière qui parait la plus naturelle mais il est difficile de se rendre compte si la topologie sur $\mathbb{P}_n^{co}(X)$ est la meilleure pour généraliser la notion de forte n-supercyclicité. La proposition suivante permet de montrer que le choix de la topologie sur $\mathbb{P}_n^{co}(X)$ est plutôt bon car il permet de montrer que la densité de l'orbite d'un sous-espace de codimension n dans $\mathbb{P}_n^{co}(X)$ implique que tout sous espace de codimension n peut-être approché dans X par un itéré du sous-espace d'orbite dense.

Proposition 4.21. *Soient T un opérateur co-fortement p-supercyclique sur un espace de Banach X et L un sous-espace co-fortement p-supercyclique pour T. Soit $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de vecteurs de X contenue dans un sous-espace de codimension p. Alors il existe deux suites $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ et $(x_m^{n_k})_{k\in\mathbb{N},m\in\mathbb{N}} \subset \overline{T^{n_k}(L)}$ telles que :*

$$\|x_m^{n_k} - x_m\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \textit{ uniformément en } m.$$

Preuve :

Soit $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs bornée par un entier strictement positif M et contenue dans un sous-espace de codimension p. Par continuité de l'inverse dans l'espace des matrices, on commence par fixer $0 < \varepsilon < \frac{1}{p}$ un réel pour lequel pour toute matrice carré M de taille p vérifiant $\|Id - M\|_\infty \leq \varepsilon$, on a

$$\|Id - M^{-1}\|_\infty \leq 1, \text{ et en particulier } \|M^{-1}\|_\infty \leq 2.$$

On peut alors trouver des éléments $y_1^*, \dots, y_p^*$ linéairement indépendants tels que $x_m \in \cap_{i=1}^p \ker(y_i^*)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. On peut de plus supposer que ces éléments sont de norme 1.

D'autre part, comme L est un sous-espace co-fortement p-supercyclique, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des éléments $z_1^{*n}, \dots, z_p^{*n} \in X^*$ tels que

$$\left\{\Pi_p^{-1}(\overline{T^n(L)})\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{(\mathrm{Vect}(z_i^{*n}, 1 \leq i \leq p) \times \cdots \times \mathrm{Vect}(z_i^{*n}, 1 \leq i \leq p))_p\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

est dense dans X^{*p}. On applique alors le Lemme 4.19 pour $F = \mathrm{Vect}(z_i^{*n}, 1 \leq i \leq p) \subset X^*$ et ε défini auparavant. On obtient l'existence d'un système que l'on notera également $(\{z_i^n\}_{i=1}^p, \{z_i^{*n}\}_{i=1}^p)$ vérifiant des conditions décrites dans le lemme.

On a alors $X = \cap_{i=1}^p \ker(z_i^{*n}) \oplus \mathrm{Vect}\left(z_1^n, \dots, z_p^n\right)$. On décompose ainsi x_m dans cette somme directe de la façon suivante : pour tout $m \in \mathbb{N}$, $x_m = x_m^n + \sum_{i=1}^p a_{i,m}^n z_i^n$.

La condition (d) du Lemme 4.19 nous assure que l'on a encore par densité une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et des matrices $\Lambda_{n_k} := (\lambda_{i,j}^{n_k})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq p}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ telles que pour tout $1 \leq j \leq p$,

$$\sum_{i=1}^p \lambda_{j,i}^{n_k} z_i^{*n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} y_j^*,$$

et quitte à prendre k suffisamment grand, on peut écrire sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} z_1^{*n_k} \\ z_2^{*n_k} \\ \vdots \\ z_p^{*n_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1}^{n_k} & \lambda_{1,2}^{n_k} & \cdots & \lambda_{1,p}^{n_k} \\ \lambda_{2,1}^{n_k} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_{p-1,p}^{n_k} \\ \lambda_{p,1}^{n_k} & \cdots & \lambda_{p,p-1}^{n_k} & \lambda_{p,p}^{n_k} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1^* + \varepsilon_1^{n_k} \\ y_2^* + \varepsilon_2^{n_k} \\ \vdots \\ y_p^* + \varepsilon_p^{n_k} \end{pmatrix}$$

où $\|\varepsilon_i^{n_k}\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $1 \le i \le p$. De plus, le vecteur $(y_i^* + \varepsilon_i^{n_k})_{1\le i\le p}$ converge vers un vecteur dont les composantes forment une famille libre. On remarque encore que le vecteur $(z_i^{*n_k})_{1\le i\le p}$ est uniformément borné en k par la condition (d) du Lemme 4.19. On déduit de ces deux remarques que pour k suffisamment grand, la matrice $\Lambda_{n_k}^{-1}$ est à coefficients bornés et notons K cette borne.

D'autre part, comme pour tout $1 \le j \le p$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $x_m \in \ker\big(y_j^*\big)$, on déduit la convergence suivante :

$$|\langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_{j,i}^{n_k} z_i^{*n_k}, x_m\rangle| = |\langle y_j^* - \sum_{i=1}^{p} \lambda_{j,i}^{n_k} z_i^{*n_k}, x_m\rangle| \le \|y_j^* - \sum_{i=1}^{p} \lambda_{j,i}^{n_k} z_i^{*n_k}\| M \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ uniformément en } m \text{ et } j.$$

Mais on sait également que pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $1 \le j \le p$,

$$|\langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_{j,i}^{n_k} z_i^{*n_k}, x_m\rangle| = |\langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_{j,i}^{n_k} z_i^{*n_k}, \sum_{i=1}^{p} a_{i,m}^{n} z_i^{n}\rangle|,$$

ainsi en notant $Z_{n_k} := (z_i^{*n_k}(z_j^{n_k}))_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le p}}$ et $A_{n_k} := (a_{i,m}^{n_k})_{1\le i\le p}$ on obtient le système d'inéquations suivant :

$$|\Lambda_{n_k} Z_{n_k} A_{n_k}| \le M\Theta_{n_k} := M \begin{pmatrix} \|y_1^* - \sum_{i=1}^{p} \lambda_{1,i}^{n_k} z_i^{*n_k}\| \\ \|y_2^* - \sum_{i=1}^{p} \lambda_{2,i}^{n_k} z_i^{*n_k}\| \\ \vdots \\ \|y_p^* - \sum_{i=1}^{p} \lambda_{p,i}^{n_k} z_i^{*n_k}\| \end{pmatrix} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que d'après les conditions (b) et (c) du Lemme 4.19, la matrice Z_{n_k} vérifie

$$\|Id - Z_{n_k}\|_\infty \le \varepsilon.$$

On a donc par définition de ε

$$\|Z_{n_k}^{-1}\|_\infty \le 2.$$

De plus, comme $\|\Lambda_{n_k}^{-1}\|_\infty \le K$, on déduit

$$\|\Lambda_{n_k}^{-1} Z_{n_k}^{-1}\|_\infty \le 2pK.$$

On applique alors le Lemme 4.20 à l'inégalité $|\Lambda_{n_k} Z_{n_k} A_{n_k}| \le M\Theta_{n_k}$ et l'on obtient que

$$\|A_{n_k}\|_\infty \le 2pK\|\Theta_k\|_\infty \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.1}$$

En particulier, cette convergence est uniforme en m. Pour conclure il suffit de remarquer que $x_m^{n_k} \in \overline{T^{n_k}(L)}$ et que la convergence de la relation (4.1) implique

$$\|x_m^{n_k} - x_m\| = \|\sum_{i=1}^{p} a_{i,m}^{n_k} z_i^{n_k}\| \le A(N) \sum_{i=1}^{p} |a_{i,m}^{n_k}| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ uniformément en } m.$$

□

Cette propriété permet donc de rapprocher la co-forte n-supercyclicité de la forte n-supercyclicité en comparant cette proposition et la Proposition 1.42 (iii).

On peut tirer des corollaires intéressants du résultat précédent et exhiber les propriétés communes de densité que l'on a annoncées. En effet, si l'on se limite à un nombre fini de points dans la proposition précédente, alors on obtient le résultat suivant qui est une version co-fortement n-supercyclique affaiblie de la Proposition 1.42 (iii) :

Corollaire 4.22. *Soient T un opérateur co-fortement p-supercyclique sur un espace de Banach X et L un sous-espace co-fortement p-supercyclique pour T. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\left\{\overline{T^n(L)} \times \ldots \times \overline{T^n(L)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans X^m.*

On déduit également de la proposition précédente le corollaire suivant pour le cas où $m = 1$:

Corollaire 4.23. *Un opérateur co-fortement p-supercyclique est d'image dense.*

La Proposition 4.21 permet aussi de montrer un critère de l'angle pour les opérateurs co-fortement n-supercycliques.

Proposition 4.24. *Soit X un espace de Banach réflexif et L un sous-espace co-fortement n-supercyclique pour T. Alors pour tout $(x_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ contenu dans un sous-espace de codimension n de X^*, il existe $(y_i^k)_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ i\in\mathbb{N}}} \subset L$ tel que :*

$$\limsup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{i\in\mathbb{N}} \left(\frac{|\langle x_i^*, T^k(y_i^k)\rangle|}{\|x_i^*\|\|T^k(y_i^k)\|} \right) = 1.$$

Preuve :

Soit $(x_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ contenu dans un sous-espace M^* de codimension n de X^*. Par définition de la norme duale, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(z_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_X$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\left\langle \frac{x_i^*}{\|x_i^*\|}, z_i \right\rangle > (1-\varepsilon)$. De plus, comme X est réflexif $M^{*\perp}$ est de dimension au moins n ([15]). Or pour $0 < \varepsilon < 1$, il est clair qu'aucun des z_i, $i \in \mathbb{N}$ n'appartient à $M^{*\perp}$. On en déduit que $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est contenu dans un sous-espace vectoriel de X de codimension n. Or comme L est co-fortement n-supercyclique pour T, on peut appliquer la Proposition 4.21 pour obtenir l'existence d'une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et de $(y_i^k)_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ i\in\mathbb{N}}} \subset L$ vérifiant :

$$\lim_{k\to+\infty} T^{n_k}(y_i^k) = z_i \text{ uniformément en } i \in \mathbb{N}.$$

En particulier, ceci implique que $\|T^{n_k}(y_i^k)\|$ converge vers 1 uniformément en $i \in \mathbb{N}$ également. En appliquant l'inégalité triangulaire,on remarque alors que $\frac{T^{n_k}(y_i^k)}{\|T^{n_k}(y_i^k)\|}$ converge uniformément en $i \in \mathbb{N}$ vers z_i Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on obtient la minoration suivante :

$$\lim_{k\in\mathbb{N}} \frac{|\langle x_i^*, T^{n_k}(y_i^k)\rangle|}{\|x_i^*\|\|T^{n_k}(y_i^k)\|} = \frac{|\langle x_i^*, z_i\rangle|}{\|x_i^*\|\|z_i\|} \geq 1-\varepsilon$$

De plus, comme les convergences sont uniformes en $i \in \mathbb{N}$, on peut prendre la limite sur l'infimum en $i \in \mathbb{N}$, et l'on obtient le résultat annoncé.

□

4.2 La classe des décalages pondérés

Les décalages pondérés étant un des principaux terrains de jeu en dynamique, il est normal de se demander ce qu'il se passe si l'on étudie la co-forte n-supercyclicité dans le cas d'un décalage pondéré. Nous avons déjà vu avec le Corollaire 4.18 qu'il n'existe pas de décalage pondéré unilatéral co-fortement n-supercyclique. Nous allons à présent nous intéresser au cas des décalages pondérés bilatéraux. Pour cela, nous allons commencer par le cas particulier où $n = 1$ pour lequel nous donnons des conditions équivalentes en terme de poids.

Proposition 4.25. *Soient $p \in [1, +\infty[$ et q tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit B_w borné sur $\ell^p(\mathbb{Z})$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) B_w est co-fortement 1-supercyclique sur $\ell^p(\mathbb{Z})$.

b) $B_w^{-1*} = B_{\frac{1}{w}}$ est supercyclique sur $\ell^q(\mathbb{Z})$.

c) Il existe une suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\max_{-r\leq\alpha\leq r}\left(\prod_{i=1}^{\alpha+N_k} w_i\right) \times \max_{-r\leq\alpha\leq r}\left(\prod_{i=0}^{\alpha-N_k+1} w_i\right)^{-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve :

D'après les hypothèses $T := B_w$ est un opérateur borné sur $\ell^p(\mathbb{Z})$ mais T^{-1} est un opérateur éventuellement non-borné sur $\ell^q(\mathbb{Z})$.

On sait par définition que T est co-fortement 1-supercyclique si et seulement s'il existe $a \in \ell^q(\mathbb{Z})$ tel que $\cup_{k=0}^{+\infty}\{\overline{T^k(\ker(a))}\}$ est dense dans $\mathbb{P}_1^{co}(\ell^p(\mathbb{Z}))$.

Lemme 4.26. $a \in \mathcal{D}(B_{\frac{1}{w}})$.

Preuve :

Par l'absurde, supposons que $a \notin \mathcal{D}(B_{\frac{1}{w}})$, c'est-à-dire que la suite $\left(\frac{a_{k+1}}{w_{k+1}}\right)_{k\in\mathbb{Z}} \notin \ell^q(\mathbb{Z})$. Nous allons montrer que dans ce cas, B_w ne préserve pas la codimension. Plus précisément, nous allons montrer que $\overline{B_w(\ker(a))} = \ell^p(\mathbb{Z})$. Dans ce but, il suffit de montrer que l'on peut approcher d'aussi près que l'on veut toute suite à support fini de $\ell^p(\mathbb{Z})$ par un élément de $B_w(\ker(a))$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $u \in \ell^p(\mathbb{Z})$ à support fini contenu dans $[-K, K]$. Commençons par remarquer que si l'on note $F_{\frac{1}{w}}$ l'opérateur de décalage pondéré à droite par la suite $\left(\frac{1}{w_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, alors cet opérateur est densément défini, car défini sur les suites à support fini, et est un inverse de B_w sur son domaine. On obtient donc l'égalité suivante

$$B_w(\ker(a)) = \{y \in \mathcal{D}(F_{\frac{1}{w}}) : \langle B_w^{-1}(y), a\rangle = 0\} = \{y \in \mathcal{D}(F_{\frac{1}{w}}) : \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{y_{n-1}a_n}{w_n}\}.$$

Comme $\left(\frac{a_{n+1}}{w_{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{Z}} \notin \ell^q(\mathbb{Z})$, il existe $b \in \ell^p(\mathbb{Z})$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{b_n a_{n+1}}{w_{n+1}} = +\infty \text{ et } \frac{b_n a_{n+1}}{w_{n+1}} \geq 0.$$

De plus, comme $b \in \ell^p(\mathbb{Z})$, il existe $N > K$ tel que

$$\sum_{|n|\geq N} |b_n|^p < \varepsilon^p.$$

Choisissons $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite à support fini vérifiant pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$0 \leq |c_k| \leq |b_k| \text{ et } \sum_{|n|\geq N} \frac{c_n a_{n+1}}{w_{n+1}} = -\sum_{|n|\leq K} \frac{u_n a_{n+1}}{w_{n+1}}.$$

On crée alors une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de la façon suivante :

$$y_n = \begin{cases} u_n \text{ pour } |n| \leq K \\ c_n \text{ pour } |n| \geq N \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Il est clair que $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{D}(F_{\frac{1}{w}})$ car c'est une suite à support fini. On remarque également que $y \in \mathcal{B}_w(\ker(a))$ car

$$\begin{aligned} \langle F_{\frac{1}{w}}(y), a\rangle &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{y_n a_{n+1}}{w_{n+1}} \\ &= \sum_{|n|\leq K} \frac{u_n a_{n+1}}{w_{n+1}} + \sum_{|n|\geq N} \frac{c_n a_{n+1}}{w_{n+1}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Enfin, y est proche de u à ε près :

$$\|u-y\|_p = \|\sum_{|n|\geq N} c_n e_n\|_p = \left(\sum_{|n|\geq N} |c_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{|n|\geq N} |b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

□

Comme $a \in \mathcal{D}(B_{\frac{1}{w}})$, d'après le Lemme 4.9 on peut réécrire cet ensemble sous la forme $\cup_{k=0}^{+\infty}\{\ker(T^{-k*}(a^*))\}$. De plus d'après la définition de la topologie de $\mathbb{P}_1^{co}$, la densité de cet ensemble est équivalente à celle de l'ensemble $\cup_{k=0}^{+\infty}\Pi_1^{-1}(\ker(T^{-k*}(a^*)))$ dans $\ell^q(\mathbb{Z})$. Enfin ceci revient à dire que $\cup_{k=0}^{+\infty}\operatorname{Vect}(T^{-k*}(a^*))$ est aussi dense dans $\ell^q(\mathbb{Z})$. C'est-à-dire que T^{-1*} est un opérateur fortement 1-supercyclique sur $\ell^q(\mathbb{Z})$ ceci équivaut à dire que T^{-1*} est supercyclique sur $\ell^q(\mathbb{Z})$. Or il est bien connu que $B_w^{-1*} = B_{\frac{1}{w}}$ et d'après le Théorème A.12 (A.8) celui-ci est supercyclique si et seulement s'il existe une suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\max_{-r\leq\alpha\leq r}\left(\prod_{i=1}^{\alpha+N_k} w_i\right) \times \max_{-r\leq\alpha\leq r}\left(\prod_{i=0}^{\alpha-N_k+1} w_i\right)^{-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Exemple 4.27. On peut illustrer la proposition ci-dessus avec un exemple d'opérateur non-inversible. Définissons $w_i = 1$ pour tout $i \geq 0$ et $w_i = \frac{1}{i}$ pour tout $i < 0$. Alors il est clair que l'opérateur B_w est non-inversible. Par contre la suite $(w_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ vérifie le théorème ci-dessus pour $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} = (k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Nous avons vu dans la proposition précédente une façon de caractériser les opérateurs co-fortement 1-supercycliques qui est valable même lorsque l'opérateur n'est pas inversible. Nous allons maintenant nous intéresser au cas de la co-forte n-supercyclicité. Un ingrédient essentiel de la preuve précédente est le fait que la forte 1-supercyclicité et la supercyclicité coïncident. A présent, si l'on souhaite généraliser la proposition précédente aux décalages co-fortement n-supercycliques, il serait agréable d'avoir un résultat d'équivalence sur la classe des décalages pondérés des notions de supercyclicité et de forte n-supercyclicité. Un tel résultat est connu dans le cas d'un décalage pondéré borné, cependant dans le cas non-borné, la preuve de Bayart et Matheron [5] ne semble pas convenir. On peut tout de même prouver l'un des deux sens :

Proposition 4.28. *Soit $T = B_w$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ avec w bornée et* $\inf_{n\in\mathbb{Z}}(w_n) = 0$. *Si T^{-1*} est supercyclique alors T est co-fortement n-supercyclique.*

Preuve :

D'après les hypothèses T est un opérateur borné sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ mais T^{-1*} est un opérateur non-borné sur $\ell^2(\mathbb{Z})$.

D'autre part, on sait qu'un opérateur de décalage pondéré bilatéral (borné ou non) est supercyclique sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ si et seulement s'il vérifie le critère de supercyclicité non-borné grâce au Théorème A.12, on en déduit que T^{-1*} vérifie ce critère. De plus, comme nous l'avons vu dans le Théorème A.11 ceci entraine la supercyclicité de n sommes directes de l'opérateur avec lui-même sur $(\ell^2(\mathbb{Z}))^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $(T^{-1})^*$ vérifie le critère de supercyclicité, alors comme X_n^* est un ouvert dense de $(X^*)^n$, il existe $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in X_n^*$ tel que

$$\mathbb{K}^* \left\{\left(\left(T^{-k}\right)^* (x_1^*), \dots, \left(T^{-k}\right)^* (x_n^*)\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ est dense dans } X_n^*.$$

Donc par définition de Π_n, l'image de cet ensemble par Π_n est aussi dense dans $\mathbb{P}_n^{co}(X)$. Or en appliquant le Lemme 4.9,

$$\Pi_n\left(\mathbb{K}\left\{\left(\left(T^{-k}\right)^* (x_1^*), \dots, \left(T^{-k}\right)^* (x_n^*)\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right) = \left\{\cap_{i=1}^n \ker\left(\left(T^{-k}\right)^* (x_i^*)\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}} = \overline{\left\{T^k\left(\cap_{i=1}^n \ker(x_i^*)\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}}.$$

Ainsi, T est co-fortement n-supercyclique.

□

5 Une caractérisation des opérateurs de décalage pondéré chaotiques sur des espaces de suites sans base inconditionnelle

5.1 Introduction

Depuis longtemps, les décalages pondérés sur les espaces de suites sont des classes privilégiées pour tester ou illustrer des résultats de dynamique des opérateurs linéaires. De ce fait, on connait beaucoup de propriétés pour ces opérateurs. Par exemple, Grosse-Erdmann dans [28] a caractérisé les décalages pondérés qui sont hypercycliques.

Théorème (Grosse-Erdmann) 5.1. *Soit X un F-espace de suites pour lequel les vecteurs unités canoniques $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base. Soit $T : X \to X$ un décalage pondéré à gauche de poids $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, T est hypercyclique si et seulement s'il existe une suite strictement croissante d'entiers naturels $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :*

$$\left(\prod_{v=1}^{n_k} a_v\right)^{-1} e_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ dans } X.$$

Après avoir caractérisé les décalages pondérés hypercycliques, un prolongement naturel est de s'intéresser aux décalages chaotiques. En effet, l'hypercyclicité est une condition nécessaire pour qu'un opérateur soit chaotique. Nous adoptons une définition d'un opérateur chaotique désormais classique due à Devaney [18].

Définition 5.2. Soit $f : E \to E$ une application continue sur un espace métrique (E, d). Alors f est dite chaotique si :

(i) f est topologiquement transitive ;
(ii) f admet un ensemble dense de points périodiques ;
(iii) f est sensible aux conditions initiales : il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$ et tout voisinage V de x, il existe $y \in V$ et un entier naturel n vérifiant $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$.

Cette définition est bien entendue très générale et la notion qui nous intéresse est celle restreinte au cadre linéaire. Or si l'on se place sur un F-espace X, la définition d'un opérateur chaotique se simplifie radicalement. En effet, dans ce cadre là par le Théorème de Transitivité de Birkhoff, on a équivalence entre être topologiquement transitif et être hypercyclique. De plus, la condition de sensibilité aux conditions initiales est une conséquence directe de l'hypercyclicité. En effet, si un opérateur T est hypercyclique, alors pour tout $x \in X$, l'ensemble $x + \mathcal{HC}(T)$ est dense et pour tout $y \in x + \mathcal{HC}(T)$,

$$\{T^n(y) - T^n(x),\ n \in \mathbb{N}\} \text{ est dense dans X.}$$

Cette conséquence a été remarquée pour la première fois par Godefroy et Shapiro [25] et implique en particulier que T est sensible aux conditions initiales. En résumé, on peut définir un opérateur chaotique sur un F-espace de la façon suivante.

Définition 5.3. Soit X un F-espace. Alors un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est dit chaotique si :

(i) T est hypercyclique ;

(ii) T admet un ensemble dense de points périodiques ;

Si l'espace est muni d'une base inconditionnelle, on dispose également d'une caractérisation des décalages pondérés à gauche qui sont chaotiques donnée également par Grosse-Erdmann dans [28].

Théorème (Grosse-Erdmann) 5.4. *Soit X un F-espace de suites pour lequel les vecteurs unités canoniques $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base inconditionnelle. Soit $T : X \to X$ un décalage pondéré à gauche de poids $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) T est chaotique.

(ii) T possède un point périodique non-nul dans X.

(iii) la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{v=1}^{n} a_v\right)^{-1} e_n$ converge dans X.

Ces deux résultats ont été largement utilisés dans la littérature mais il reste un obstacle qui n'a pas encore été résolu pour la partie chaotique : que se passe-t-il si l'on n'a pas de base inconditionnelle ? Grosse-Erdmann [28] a donné un exemple d'espace sans base inconditionnelle pour lequel l'opérateur de décalage à gauche vérifie les deux dernières conditions du théorème précédent mais n'est pas chaotique. Cependant, aucun résultat général n'a été donné depuis pour généraliser le Théorème de Grosse-Erdmann ou pour montrer qu'une généralisation est "impossible".

5.2 L'espace de James et la généralisation de Lohman et Casazza

Nous allons nous intéresser à ce problème sur un autre espace bien connu : l'espace de James qui est un espace sans base inconditionnelle qui a été défini par James en 1950 [34], [35]. On pourra se référer à la Définition 3.32 et aussi consulter [39] et [50] pour plus de détails sur la notion de base inconditionnelle. Nous allons rappeler la définition de l'espace de James et fixer quelques notations pour la suite. Pour une présentation détaillée de l'espace de James, de ses propriétés et de plusieurs généralisations, on pourra se reporter au livre de Getter et Gamboa de Buen [21].

Définition 5.5. Soit $p \in [1, +\infty[$. On note J_p l'ensemble de toutes les suites réelles $x = (x_n)_{n\geq 1}$ de c_0 vérifiant :

$$\|x\|_{J_p} = \sup \left(|x_{p_1} - x_{p_2}|^p + |x_{p_2} - x_{p_3}|^p + \cdots + |x_{p_{k-1}} - x_{p_k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

où le sup est pris sur tous les choix possibles de $k \geq 2$ et de $1 \leq p_1 < \cdots < p_k$.

Remarque 5.6. On peut noter que :

$$\|x\|_{(1)} = \frac{1}{2^{\frac{1}{p}}} \sup \left(|x_{p_1} - x_{p_2}|^p + |x_{p_2} - x_{p_3}|^p + \cdots + |x_{p_k} - x_{p_{k+1}}|^p + |x_{p_{k+1}} - x_{p_1}|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|x\|_{(2)} = \sup \left(|x_{p_1} - x_{p_2}|^p + |x_{p_3} - x_{p_4}|^p \cdots + |x_{p_{2k-1}} - x_{p_{2k}}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

et

$$\|x\|_{(3)} = \sup \left(|x_{p_1} - x_{p_2}|^p + |x_{p_3} - x_{p_4}|^p \cdots + |x_{p_{2k-1}} - x_{p_{2k}}|^p + |x_{p_{2k+1}}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

où le sup est pris sur tous les choix possibles de $k \geq 1$ et de $1 \leq p_1 < \cdots < p_{2k+1}$ sont des normes équivalentes sur J_p.

Remarque 5.7. L'espace classique que l'on appelle l'Espace de James est l'espace J_2 qui a été construit par James en 1950 [34], [35]. La définition que nous donnons ci-dessus est une généralisation naturelle de l'espace de James où les espaces de départ sont des espaces ℓ^p pour $p \in [1, +\infty[$.

Avant de nous lancer dans la caractérisation des opérateurs de décalage pondéré à gauche chaotiques, nous allons nous familiariser avec les espaces de James et donner quelques propriétés bien connues de ces espaces.

Proposition 5.8. *Pour $p \in]1, +\infty[$, on a les propriétés suivantes :*

a) la base canonique $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base de Schauder sur J_p ;

b) les duaux successifs de J_p sont séparables ;

c) J_p est quasi-réflexif d'ordre un ;

d) $(J_p, \|\cdot\|_*)$ est isométriquement isomorphe à J^{**} ;

e) J_p ne possède pas de base inconditionnelle.

De plus, les propriétés a) et e) sont vérifiées pour $p = 1$.

Cet espace et ses propriétés particulières sont connus depuis le début des années 1950. En 1975, Casazza et Lohman ont généralisé cette construction en donnant une méthode générale de construction d'espaces vérifiant les propriétés connues pour l'espace de James dans l'article [40]. Nous allons détailler cette construction ci-dessous mais auparavant nous devons rappeler certaines définitions et propriétés de certaines bases de Schauder, on pourra trouver (beaucoup) plus de détails dans [50] ou [39].

La définition ci-dessous est très importante dans le cadre de la réflexivité des espaces de Banach. En effet, la propriété suivante pour une base est une condition nécessaire pour qu'un espace de Banach soit réflexif.

Définition 5.9. Une base de Schauder $(b_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'un espace de Banach X est dite b-complète si la série $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i b_i$ converge dès que la suite $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\| < +\infty$.

Les bases des espaces de Banach assurent certaines propriétés agréables. Cependant, si l'on souhaite se restreindre à une classe d'espaces qui partagent beaucoup de propriétés des espaces classiques, on peut s'intéresser aux espaces qui possèdent une base symétrique.

Définition 5.10. Une base de Schauder $(b_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'un espace de Banach X est dite symétrique si pour tout $x = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i b_i \in X$ et pour toutes permutations des entiers σ, τ, alors $\sum_{i=1}^{+\infty} x_{\sigma(i)} b_{\tau(i)}$ converge. De plus, on dit que la norme de X est symétrique si pour tout $x = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i b_i \in X$ et pour toutes permutations σ et τ des entiers, alors $\sum_{i=1}^{+\infty} x_{\sigma(i)} b_{\tau(i)}$ converge et $\|\sum_{i=1}^{+\infty} x_{\sigma(i)} b_{\tau(i)}\| = \|\sum_{i=1}^{+\infty} x_i b_i\|$.

La Proposition suivante donne quelques conditions équivalentes permettant d'identifier une base symétrique. On peut se référer à [50] pour une preuve de cette proposition et d'autres caractérisations.

Proposition 5.11. *Soit X un espace de Banach muni d'une base $(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ *est symétrique ;*

(ii) Pour tout $x=\sum_{i=1}^{+\infty} x_i b_i \in X$,

$$\sup_{\sigma\in\sigma(\mathbb{N}^*)} \sup_{\substack{|\beta_i|<1\\ 1\leq k<+\infty}} \left\|\sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i b_{\sigma(i)}\right\| < +\infty;$$

(iii) Il existe une constante $C\geq 1$ *telle que*

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} x_i b_i\right\| \leq C \left\|\sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i b_{\sigma(i)}\right\|$$

pour toute permutation des entiers σ *et toute suite finie de scalaires* $x_1,\ldots,x_k,\beta_1,\ldots,\beta_k$ *où* $|\beta_i|\leq 1$ *pour tout* $i=1,\ldots,k$.

En particulier, les espaces munis d'une base symétrique ont la propriété remarquable que la norme "augmente" avec les coefficients devant les vecteurs de base.

Corollaire 5.12. *Soit $(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une base symétrique d'un espace de Banach X. Alors il existe une constante $C\geq 1$ telle que*

$$\left\|\sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i \alpha_i b_i\right\|_X \leq C \left\|\sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i b_i\right\|_X$$

pour toutes suites de scalaires $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ avec $|\beta_i|\leq 1$ pour tout $i\in\mathbb{N}^*$.

Il est pratique de remarquer que si un espace de Banach possède une base symétrique normalisée, alors on peut trouver une norme équivalente à celle de départ pour laquelle le fait de changer l'ordre de la sommation et de multiplier les coefficients par des scalaires unimodulaires ne change pas la norme du vecteur que l'on considère. C'est ce que donne la proposition ci-dessous.

Proposition 5.13. *Si X est un espace de Banach muni d'une base symétrique normalisée $(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, alors la formule*

$$|||x||| = \sup_{\sigma\in\sigma(N^*)} \sup_{\substack{|\beta_i|<1\\ 1\leq k<+\infty}} \left\|\sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i b_{\sigma(i)}\right\|$$

donne une nouvelle norme sur X qui est équivalente à la norme de X. Cette nouvelle norme satisfait la condition (iii) de la Proposition 5.11 pour $C=1$ et

$$\left|\left|\left|\sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i x_{\sigma(i)} b_{\tau(i)}\right|\right|\right| = |||x|||$$

pour tous $x\in X$, $\sigma,\tau\in\sigma(\mathbb{N}^*)$ et $|\beta_i|=1$ et

$$|||b_i||| = 1 \text{ pour tout } i\in\mathbb{N}^*.$$

Remarque 5.14. Dans ce qui suit, lorsque nous supposons qu'une base est symétrique, nous supposerons également implicitement que la norme sur cet espace est symétrique puisqu'un tel choix est possible par la proposition précédente.

Enfin, il est de temps en temps pratique de pouvoir revenir à des espaces classiques comme les espaces ℓ^p. La notion de base présentée dans la proposition ci-dessous permet de rapprocher un espace avec une telle base d'un espace ℓ^p.

Définition 5.15. Soient $1 \leq p < +\infty$ et X un espace de Banach muni d'une base $(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. La base $(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est p-Hilbertienne par bloc s'il existe une constante K telle que pour toute suite basique de blocs bornée $(z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de $(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et toute suite de scalaires $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_i\right\| \leq K \sup_{i\in\mathbb{N}^*} \|z_i\| \left(\sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ m \in \mathbb{N}^*.$$

Les propriétés des bases listées ci-dessus sont des propriétés qui sont vérifiées pour les espaces sympathiques classiques, on peut par exemple citer les espaces ℓ^p pour $p < +\infty$, certains espaces de suites d'Orlicz,... Nous introduisons la notation suivante pour ne pas surcharger certains passages dans la suite.

Notation. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble de toutes les suites strictement croissantes et finies de $\mathbb{N}^*$ comportant un nombre impair de termes $P = (p_i)_{1\leq i\leq 2n+1}$ où $n \geq 1$.

Grâce aux propriétés des bases ci-dessus, Lohman et Casazza ont pu généraliser la construction de James à des espaces de base différents de ℓ^2. En effet, la définition ci-dessous a été donnée dans l'article [40].

Définition 5.16. Soit X un espace de Banach muni d'une base de Schauder monotone et normalisée $(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. Pour tout vecteur $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $P \in \mathcal{P}$, on définit

$$\|x\|_P = \left\|\sum_{i=1}^{n} (x_{p_{2i-1}} - x_{p_{2i}}) b_i + x_{p_{2n+1}} b_{n+1}\right\|_X.$$

L'espace de James généralisé est alors défini par

$$J(b_i) = \{x \in c_0 : \sup_{P\in\mathcal{P}} \|x\|_P < +\infty\}.$$

De plus, si l'on munit $J(b_i)$ de la norme définie par

$$\|x\|_J = \sup_{P\in\mathcal{P}} \|x\|_P,$$

alors $(J(b_i), \|\cdot\|_J)$ est un espace de Banach.

On retrouve dans cette définition la "géométrie" de l'espace original de James. Cependant, les ressemblances avec l'espace de James ne s'arrêtent pas là. En effet, cette classe plus générale d'espaces partage beaucoup de propriétés avec le premier espace de James quitte à imposer quelques conditions supplémentaires à l'espace X à partir duquel on construit l'espace de James généralisé. On peut donner quelques propriétés de la norme sur l'espace de James généralisé qui nous intéresseront pour la suite.

Proposition 5.17. *Soit $J(b_i)$ un espace de James généralisé construit avec la méthode de Lohman et Casazza, alors*

a) pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\|e_i\|_J = 1$;

b) pour tout $x \in J(b_i)$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_J$;

c) $\|x\|_J = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\|_J$.

De plus, si l'on rajoute quelques hypothèses sur la norme de X, on retrouve les propriétés essentielles de l'espace de James comme la quasi-réflexivité par exemple.

Proposition 5.18. *Soit X un espace de Banach muni d'une base normalisée, monotone, b-complète et symétrique $(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. Alors la base canonique $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base de Schauder sur l'espace de James généralisé $J(b_i)$. De plus, si l'on suppose que X est réflexif et que $(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une base de bloc p-hilbertienne pour $1 < p < +\infty$, alors :*

(a) les duaux successifs de $J(b_i)$ sont séparables ;

(b) $J(b_i)$ est quasi-réflexif d'ordre un ;

(c) $J(b_i)$ est topologiquement isomorphe à J^{**} ;

(d) $J(b_i)$ ne possède pas de base inconditionnelle.

Preuve :

Les points (b) et (c) sont prouvés dans l'article [40]. Le point (a), quant à lui, est une conséquence directe du point (b). Enfin le point (d) découle du fait que d'après (a), $J(b_i)$ ne contient ni c_0 ni l_1. En effet, d'après un théorème de James si un espace admet une base inconditionnelle alors cet espace est réflexif si et seulement s'il ne contient ni c_0 ni l_1. Or $J(b_i)$ n'est pas réflexif mais ne contient pas non-plus c_0 ou l_1 donc il n'admet pas de base inconditionnelle.

□

On sait que l'espace de James contient deux copies de ℓ^2 dont la somme directe algébrique est dense dans J_2. Lohman et Casazza ont également prouvé un même type de propriété pour les espaces $J(b_i)$.

Proposition 5.19. *Soit $(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une base symétrique de X. Alors*

a) $(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ domine $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$;

b) $(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est équivalente à $(e_{2i})_{i\in\mathbb{N}^*}$ et à $(e_{2i-1})_{i\in\mathbb{N}^*}$.

Pour ce qui nous intéresse dans la suite, nous aurons besoin de préciser un peu cette dernière proposition.

Proposition 5.20. *Soit $(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une base symétrique de X. Alors*

(a) Notons $S : X \to J(b_i)$ défini par $S(b_i) = e_i$. Alors S est bien défini et est un opérateur linéaire continu de X vers $J(b_i)$ et $\|S\| \leq 2$. En particulier, pour toute suite de scalaires $(x_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, on a :

$$\left\|\sum_{i=1}^{+\infty} x_i e_i\right\|_J \leq 2 \left\|\sum_{i=1}^{+\infty} x_i b_i\right\|_X .$$

(b) Soit $I \subset \mathbb{N}^*$ un ensemble infini qui ne contient pas deux entiers consécutifs. Alors $(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est équivalente à $(e_i)_{i\in I}$.

Preuve :

Commençons par montrer (a). Soit $x = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} x_i b_i \in X$. Comme $(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une base de Schauder, $(x_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \in c_0$. Considérons donc

$$\|S(x)\|_J = \sup_{P\in\mathcal{P}} \|\sum_{i=1}^{k}(x_{p_{2i-1}} - x_{p_{2i}})b_i + x_{p_{2k+1}}b_{k+1}\|_X.$$

Alors pour tout $P \in \mathcal{P}$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{k}(x_{p_{2i-1}} - x_{p_{2i}})b_i + x_{p_{2k+1}}b_{k+1}\right\|_X &= \left\|\sum_{i=1}^{k+1} x_{p_{2i-1}}b_i - \sum_{i=1}^{k} x_{p_{2i}}b_i\right\|_X \\
&\leq \left\|\sum_{i=1}^{k+1} x_{p_{2i-1}}b_i\right\|_X + \left\|\sum_{i=1}^{k} x_{p_{2i}}b_i\right\|_X \\
&\leq 2\left\|\sum_{i=1}^{+\infty} x_i b_i\right\|_X \quad \text{par le Corollaire 5.12 et par symétrie de } (b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}.
\end{aligned}$$

Ceci prouve la propriété (a).

Le deuxième point est clair par définition de la norme sur $J(b_i)$.

□

5.3 Quelques résultats préliminaires sur les espaces de James généralisés

Pour commencer cette section, nous allons énumérer une liste de résultats simples mais dont nous aurons besoin pour parler de décalage pondéré sur les espaces de James généralisés et pour détecter un éventuel comportement chaotique dans cette classe d'opérateurs.

Nous commençons par énoncer un critère simple pour s'assurer de l'appartenance d'un vecteur à un espace de James généralisé.

Proposition 5.21. *Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de nombres réels positifs qui tend vers 0. Alors $(a_n)_{n\geq 1} \in J(b_i)$.*

Preuve :

Il suffit de vérifier que $\|a\|_J < +\infty$. Soit $P = (p_1, \ldots, p_{2k+1})$ une suite strictement croissante d'entiers naturels non-nuls, alors comme la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante à termes positifs, on déduit que

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{i=1}^{k}(a_{p_{2i-1}}-a_{p_{2i}})b_i+a_{p_{2k+1}}b_{n+1}\right\|_X\\
\leq&\sum_{i=1}^{k}|a_{p_{2i-1}}-a_{p_{2i}}|\|b_i\|_X+a_{p_{2k+1}}\|b_{n+1}\|_X\\
\leq&\sum_{i=1}^{k}(a_{p_{2i}}-a_{p_{2i-1}})+a_{p_{2k+1}}\text{ car }(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}\text{ est une base normalisée de }X\\
\leq&2a_1\text{ car }\sum_{i=1}^{k}(a_{p_{2i}}-a_{p_{2i-1}})\text{ est une somme partielle d'une série alternée.}
\end{aligned}$$

Cette majoration ne dépendant pas de P, on déduit que $\|a\|_J<+\infty$.

□

D'après la propriété (a) de la Proposition 5.20, il est aisé de voir que si un vecteur $x=\sum_{i=1}^{+\infty}x_ib_i\in X$ alors la suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}^*}\in J(b_i)$. Nous allons voir avec la proposition suivante que l'inclusion inverse a lieu en supposant que la suite est suffisamment lacunaire.

Proposition 5.22. *Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs vérifiant que pour tout $i\geq 1$, si $a_i\neq 0$ alors $a_{i+1}=0$. Si $(a_n)_{n\geq 1}\in J(b_i)$, alors $\sum_{i=1}^{+\infty}a_ib_i\in X$.*

Preuve :

Pour prouver cette proposition, on se sert de l'équivalence des bases données par la propriété (b) de la Proposition 5.20. En effet, si l'on note I l'ensemble des indices pour lesquels $a_i\neq 0$, alors l'ensemble I ne contient pas deux entiers successifs par hypothèse. Comme $(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une base b-complète de X, $\sum_{i=1}^{+\infty}a_ib_i\in X$ si et seulement si $\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\|<+\infty$. L'équivalence des bases $(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $(e_i)_{i\in I}$ conclut alors la preuve de la proposition puisque :

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\left\|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right\|_X&\leq C\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\left\|\sum_{\substack{i\in I\\1\leq i\leq n}}a_ie_i\right\|_J\\
&=C\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\left\|\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\right\|_J\text{ par définition de }I\\
&=C\left\|\sum_{i=1}^{+\infty}a_ie_i\right\|_J\text{ par la propriété (c) de la Proposition 5.17}\\
&<+\infty
\end{aligned}$$

□

Nous énonçons à présent un résultat qui fait le lien entre le caractère borné d'une suite pour la norme $\|\cdot\|_J$ et la convergence de celle ci dans $\mathbb{R}$.

Proposition 5.23. *Soit $(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une base symétrique de X. Soit $a = (a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs telle que $\|a\|_J < +\infty$, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{R}^+$. En particulier, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.*

Preuve :

Supposons par l'absurde que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas alors on a l'existence dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ des limites supérieures et inférieures de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On définit alors

$$\min(\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n - \underline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n, 1) := \delta > 0.$$

Par définition des limites supérieures et inférieures, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que

$$|a_{n_{2i-1}} - a_{n_{2i}}| \geq \frac{\delta}{2} \tag{5.1}$$

D'autre part, on sait que

$$\begin{aligned}
\|a\|_J &\geq \sup_{m\in\mathbb{N}^*} \left\| \sum_{i=1}^{m} (a_{n_{2i-1}} - a_{n_{2i}}) b_i + a_{n_{2m+1}} b_{m+1} \right\|_X \\
&\geq \sup_{m\in\mathbb{N}^*} \left\| \sum_{i=1}^{m} |a_{n_{2i-1}} - a_{n_{2i}}| b_i \right\|_X \quad \text{par le Corollaire 5.12.}
\end{aligned}$$

Or comme la base de X est b-complète, ceci est équivalent à dire que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |a_{n_{2i-1}} - a_{n_{2i}}| b_i \in X.$$

Ainsi la suite $(|a_{n_{2i-1}} - a_{n_{2i}}|)_{i\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 mais ceci contredit (5.1).

□

5.4 Des conditions assurant la chaoticité des opérateurs de décalage pondéré sur les espaces de Lohman et Casazza

Cette section décrit les opérateurs de décalage à gauche pondérés sur les espaces de James généralisés et caractérise la chaoticité dans cette classe. Nous avons introduit dans les parties précédentes les définitions et quelques propriétés dont nous aurons besoin dans cette partie. La première étape consiste à identifier les décalages pondérés qui sont continus d'un espace de James généralisé sur lui-même, c'est le but de la proposition suivante.

Proposition 5.24. *Soit $a = (a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels positifs. Supposons également que $(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une base inconditionnelle de X. Alors $B_a \in \mathcal{B}(J(b_i))$ si et seulement si $\|a\|_J < +\infty$.*

Preuve :

Notons B l'opérateur de décalage à gauche et D_a l'opérateur de multiplication diagonal par la suite a. Comme $B_a = B \circ D_a$ et $B \in \mathcal{B}(J(b_i))$, il suffit de montrer que $D_a \in \mathcal{B}(J(b_i))$ si et seulement si $\|a\|_J < +\infty$.

On commence par montrer que si $\|a\|_J < +\infty$ alors $D_a \in \mathcal{B}(J(b_i))$. Soit $x \in J(b_i)$, alors $D_a(x) \in c_0$ grâce à la Proposition 5.23. Il reste à montrer que la norme de $D_a(x)$ dans $J(b_i)$ est majorée en fonction de celle de x.

$$\begin{aligned}
\|D_a(x)\|_J &= \sup_{P\in\mathcal{P}} \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_{p_{2i-1}}x_{p_{2i-1}} - a_{p_{2i}}x_{p_{2i}})b_i + a_{p_{2n+1}}x_{p_{2n+1}}b_{n+1} \right\|_X \\
&= \sup_{P\in\mathcal{P}} \left\| \sum_{i=1}^{n} \left((a_{p_{2i-1}}x_{p_{2i-1}} - a_{p_{2i-1}}x_{p_{2i}}) + (a_{p_{2i-1}}x_{p_{2i}} - a_{p_{2i}}x_{p_{2i}}) \right) b_i + a_{p_{2n+1}}x_{p_{2n+1}}b_{n+1} \right\|_X \\
&\leq \sup_{P\in\mathcal{P}} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_{p_{2i-1}}(x_{p_{2i-1}} - x_{p_{2i}})b_i + \frac{a_{p_{2n+1}}}{2}x_{p_{2n+1}}b_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} (a_{p_{2i-1}} - a_{p_{2i}})x_{p_{2i}}b_i + a_{p_{2n+1}}\frac{x_{p_{2n+1}}}{2}b_{n+1} \right\|_X \\
&\leq \sup_{P\in\mathcal{P}} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_{p_{2i-1}}(x_{p_{2i-1}} - x_{p_{2i}})b_i + \frac{a_{p_{2n+1}}}{2}x_{p_{2n+1}}b_{n+1} \right\|_X + \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_{p_{2i-1}} - a_{p_{2i}})x_{p_{2i}}b_i + a_{p_{2n+1}}\frac{x_{p_{2n+1}}}{2}b_{n+1} \right\|_X \\
&\leq \|a\|_\infty \|x\|_J + \|a\|_J \|x\|_\infty \text{ par la Proposition 5.23 et car } (b_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \text{ est une base inconditionnelle de } X \\
&\leq (\|a\|_\infty + \|a\|_J) \|x\|_J \text{ avec la Remarque 5.17 b).}
\end{aligned}$$

Ainsi, $D_a \in \mathcal{B}(J(b_i))$.

Montrons maintenant que si $\|a\|_J = +\infty$, alors $D_a \notin \mathcal{B}(J(b_i))$. Dans ce cas, soit $C > 0$ on va montrer qu'il existe $x \in J(b_i)$ et $\|x\|_J = 1$ tel que $\|D_a(x)\|_J > C\|x\|_J = C$. Comme $\|a\|_J = +\infty$, il existe $N \geq 2$ et $1 \leq p_1 < \cdots < p_{2N+1}$ tels que $\| \sum_{i=1}^{N} (a_{p_{2i-1}} - a_{p_{2i}})b_i + a_{p_{2N+1}}b_{N+1}\|_X > C$. Prenons $x \in J(b_i)$ tel que $x_i = 1$ pour tout $1 \leq i \leq p_{2N+1}$ et $x_i = 0$ si $i > p_{2N+1}$. Alors on vérifie facilement que $\|x\|_J = 1$ et on a :

$$\begin{aligned}
\|D_a(x)\|_J &\geq \left\| \sum_{i=1}^{N} (a_{p_{2i-1}}x_{p_{2i-1}} - a_{p_{2i}}x_{p_{2i}})b_i + (a_{p_{2N+1}}x_{p_{2N+1}})b_{N+1} \right\|_X \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{N} (a_{p_{2i-1}} - a_{p_{2i}})b_i + a_{p_{2N+1}}b_{N+1} \right\|_X \geq C\|x\|_J.
\end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve de la proposition.

□

À présent, nous avons toutes les informations nécessaires pour caractériser les décalages pondérés chaotiques sur l'espace $J(b_i)$. Le théorème suivant s'inspire des travaux de Grosse-Erdmann [28] et donne trois conditions équivalentes pour qu'un opérateur de décalage pondéré soit chaotique sur $J(b_i)$.

Théorème 5.25. *Soit $a = (a_n)_{n\geq 1}$ une suite de poids telle que $\|a\|_J < +\infty$, alors on a équivalence entre :*

(i) B_a est chaotique sur $J(b_i)$;

(ii) il existe un point périodique non-nul pour B_a dans X ;

(iii) pour tous $j \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\prod_{v=j+1}^{j+kN} a_v\right)^{-1} b_{j+kN} \in X$;

(iv) $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\prod_{v=1}^{k} a_v\right)^{-1} b_k \in X$.

Preuve :

On remarque tout d'abord que l'implication (iii) $\Rightarrow$ (iv) est triviale puisque c'est le cas particulier où $j = 0$ et $N = 1$. De même, l'implication inverse (iv) $\Rightarrow$ (iii) est également vérifiée car $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base inconditionnelle de X et pour tous $j \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\prod_{v=j+1}^{j+kN} a_v\right)^{-1} b_{j+kN}$ est une sous-série de $\left(\prod_{v=1}^{j} a_v\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\prod_{v=1}^{k} a_v\right)^{-1} b_k \in X$.

Montrons à présent que (i) implique (ii).
Pour cela, supposons que B_a est chaotique. Par conséquent, B_a est hypercyclique et d'après la caractérisation des décalages pondérés hypercycliques, il existe une suite d'entiers strictement croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\left(\prod_{v=1}^{n_k} a_v\right)^{-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'autre part, comme on l'a vu dans la Proposition 5.23, la suite a possède une limite $A \in \mathbb{R}^+$. Il suffit de combiner ces deux propriétés pour obtenir que la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la condition $A \in [1, +\infty[$.

Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, alors comme B_a est chaotique, il existe un entier $N_\varepsilon > 1$ et un vecteur $x_\varepsilon \in J(b_i)$ tels que

$$B_a^{N_\varepsilon}(x_\varepsilon) = x_\varepsilon \text{ et } \|x_\varepsilon - e_1\|_J < \varepsilon.$$

On peut obtenir plus d'informations sur le vecteur x_ε en le comparant avec $B_a^{N_\varepsilon}(x_\varepsilon)$, ainsi on déduit que pour tout $j \in \{0, \ldots, N_\varepsilon - 1\}$ et tout $k \geq 1$,

$$x_\varepsilon(j + kN) = \left(\prod_{v=j+1}^{j+kN_\varepsilon} a_v\right)^{-1} x_\varepsilon(j).$$

Nous allons montrer que $y_\varepsilon := \sum_{i=1}^{+\infty} x_\varepsilon(i) b_i \in X$. Pour cela nous allons décomposer y_ε en une somme de vecteurs de X. Dans ce but, on définit pour tout $q \in \{1, \ldots, N_\varepsilon\}$, x_ε^q le vecteur de c_0 vérifiant

$$x_\varepsilon^q(i) = \begin{cases} x_\varepsilon(i) \text{ si } i = q + kN_\varepsilon, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

De la même façon, on définit $y_\varepsilon^q := \sum_{i=1}^{+\infty} y_\varepsilon^q(i) b_i$ comme le vecteur de c_0 tel que

$$y_\varepsilon^q(i) = \begin{cases} y_\varepsilon(i) \text{ si } i = q + kN_\varepsilon, \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

c'est un sous vecteur de y_ε et

$$y_\varepsilon = \sum_{q=1}^{N_\varepsilon} y_\varepsilon^q \text{ et } x_\varepsilon = \sum_{q=1}^{N_\varepsilon} x_\varepsilon^q.$$

Remarquons que comme $N_\varepsilon > 1$, alors $x_\varepsilon^q \in J(b_i)$ est équivalent à $y_\varepsilon^q \in X$. En effet, tout coefficient non-nul de x_ε^q relativement à la base canonique jouxte des éléments nuls puisque $N_\varepsilon > 1$ ainsi le résultat découle de la Proposition 5.22.

A présent, nous souhaitons montrer que pour tout $q \in \{1, \ldots, N_\varepsilon\}$, $y_\varepsilon^q \in X$. Pour cela, commençons par montrer que $y_\varepsilon^2 \in X$. Supposons par l'absurde que $x_\varepsilon^2 \notin J(b_i)$ c'est-à-dire de façon équivalente $y_\varepsilon^2 \notin X$. Alors, en particulier

$$\begin{aligned}
\|x_\varepsilon\|_J &= \sup_{P\in\mathcal{P}} \left\| \sum_{i=1}^{k} \left(x_\varepsilon(p_{2i-1}) - x_\varepsilon(p_{2i})\right) b_i + x_\varepsilon(p_{2k+1}) b_{k+1} \right\|_X \\
&\geq \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} \left(x_\varepsilon(1+iN_\varepsilon) - x_\varepsilon(2+iN_\varepsilon)\right) b_i \right\|_X \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} \left(x_1 \left(\prod_{v=2}^{1+iN_\varepsilon} a_v \right)^{-1} - x_2 \left(\prod_{v=3}^{2+iN_\varepsilon} a_v \right)^{-1} \right) b_i \right\|_X \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\prod_{v=3}^{2+iN_\varepsilon} a_v \right)^{-1} \left(\frac{a_{2+iN_\varepsilon} x_1}{a_2} - x_2 \right) b_i \right\|_X .
\end{aligned}$$

Or on sait par hypothèse que $a_{2+iN_\varepsilon} \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} A \geq 1$, ainsi il existe $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq i_\varepsilon$,

$$A - \varepsilon < a_{2+iN_\varepsilon} < A + \varepsilon.$$

Ainsi, comme $\|x_\varepsilon - e_1\|_J < \varepsilon$ et comme $x_\varepsilon \in c_0$, il est facile de vérifier que l'on a les encadrements suivants

$$1 - \varepsilon < x_\varepsilon(1) < 1 + \varepsilon \quad \text{et} \quad -\varepsilon < x_\varepsilon(2) < \varepsilon.$$

En regroupant ces informations, on obtient la minoration suivante pour tout $i \geq i_\varepsilon$:

$$\frac{(A-\varepsilon)(1-\varepsilon)}{a_2} - \varepsilon < x_\varepsilon(1)\frac{a_{2+iN_\varepsilon}}{a_2} - x_\varepsilon(2).$$

Or le terme de gauche dans l'expression précédente tend vers $\frac{A}{a_2} > 0$ quand ε tend vers 0. Ainsi en prenant ε suffisamment petit, on obtient l'existence de $\delta > 0$ tel que pour tout $i \geq i_\varepsilon$,

$$x_\varepsilon(1)\frac{a_{2+iN_\varepsilon}}{a_2} - x_\varepsilon(2) > \delta.$$

En utilisant ceci dans la minoration de $\|x_\varepsilon\|_J$ précédente et en utilisant le Corollaire 5.12, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|x_\varepsilon\|_J &\geq \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\prod_{v=3}^{2+iN_\varepsilon} a_v \right)^{-1} \left(\frac{a_{2+iN_\varepsilon} x_\varepsilon(1)}{a_2} - x_\varepsilon(2) \right) b_i \right\|_X \\
&\geq \left\| \sum_{i=i_\varepsilon}^{+\infty} \left(\prod_{v=3}^{2+iN_\varepsilon} a_v \right)^{-1} \delta b_i \right\|_X \\
&= \frac{\delta}{x_\varepsilon(2)} \left\| \sum_{i=i_\varepsilon}^{+\infty} \left(\prod_{v=3}^{2+iN_\varepsilon} a_v \right)^{-1} x_\varepsilon(2) b_i \right\|_X = +\infty \text{ car } y_\varepsilon^2 \notin X.
\end{aligned}$$

Ceci contredit le fait que $x_\varepsilon \in J(b_i)$. On ne peut donc pas être dans le cas où pour tout $q \in \{1, \ldots, N_\varepsilon\}$, $x_\varepsilon^q \notin J(b_i)$ puisque $x_\varepsilon^2 \in J(b_i)$ et de façon équivalente $y_\varepsilon^2 \in X$. L'idée est de se servir de la géométrie de la norme de $J(b_i)$ pour propager cette propriété pour tout $q \in \{1, \dots, N_\varepsilon\}$. Comme $x_\varepsilon \in J(b_i)$, alors pour tout $q \in \{1, \dots, N_\varepsilon\}$ tel que $x_\varepsilon^q \in J(b_i)$, on a également $x_\varepsilon - x_\varepsilon^q \in J(b_i)$ et

$$\begin{aligned}
\|x_\varepsilon - x_\varepsilon^q\|_J &= \sup_{p \in \mathcal{P}} \left\| \sum_{i=1}^{k} ((x_\varepsilon - x_\varepsilon^q)(p_{2i-1}) - (x_\varepsilon - x_\varepsilon^q)(p_{2i}))b_i + (x_\varepsilon - x_\varepsilon^q)(p_{2k+1})b_{k+1} \right\|_X \\
&\geq \begin{cases} \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} ((x_\varepsilon - x_\varepsilon^q)(q + iN_\varepsilon) - (x_\varepsilon - x_\varepsilon^q)(q + iN_\varepsilon + 1))b_i \right\|_X & \text{si } q < N_\varepsilon \\ \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} ((x_\varepsilon - x_\varepsilon^q)(q + (i-1)N_\varepsilon - 1) - (x_\varepsilon - x_\varepsilon^q)(q + (i-1)N_\varepsilon))b_i \right\|_X & \text{si } q > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} x_\varepsilon(q + iN_\varepsilon + 1))b_i \right\|_X & \text{si } q < N_\varepsilon \\ \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} x_\varepsilon(q + (i-1)N_\varepsilon - 1))b_i \right\|_X & \text{si } q > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \lim_{n \to +\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_\varepsilon^{q+1}(q + iN_\varepsilon + 1))b_i \right\|_X & \text{si } q < N_\varepsilon \\ \lim_{n \to +\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_\varepsilon^{q-1}(q + (i-1)N_\varepsilon - 1))b_i \right\|_X & \text{si } q > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \lim_{n \to +\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_\varepsilon^{q+1}(i)b_i \right\|_X & \text{si } q < N_\varepsilon \\ \lim_{n \to +\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_\varepsilon^{q-1}(i)b_i \right\|_X & \text{si } q > 1 \end{cases} \quad \text{car } (b_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \text{ est une base symétrique} \\
&= \begin{cases} \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} x_\varepsilon^{q+1}(i)b_i \right\|_X & \text{si } q < N_\varepsilon \\ \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} x_\varepsilon^{q-1}(i)b_i \right\|_X & \text{si } q > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

On obtient donc que si $q > 1$, alors $x_\varepsilon^{q-1} \in J(b_i)$, c'est-à-dire $y_\varepsilon^{q-1} \in X$ et si $q < N_\varepsilon$, alors $x_\varepsilon^{q+1} \in J(b_i)$ et donc $y_\varepsilon^{q+1} \in X$. On peut réitérer cette procédure avec le vecteur que l'on obtient x_ε^{q-1} et/ou x_ε^{q+1} dans $J(b_i)$, puis de proche en proche, on obtient que pour tout $q \in \{1, \dots, N_\varepsilon\}$, $x_\varepsilon^q \in J(b_i)$ et de façon équivalente $y_\varepsilon^q \in X$. En particulier, ceci implique que $y_\varepsilon = \sum_{q=1}^{N_\varepsilon} y_\varepsilon^q \in X$ et ceci prouve (ii).

Montrons maintenant que (ii) implique (iv). Soit $x \in X$ non-nul et périodique pour B_a de période $N \geq 1$, alors de la même façon que précédemment, on peut déduire des informations de la périodicité de x, ainsi

$$x_{j+kN} = \left(\prod_{v=j+1}^{j+kN} a_v \right)^{-1} x_j$$

pour tout $j \in \{0, \dots, N-1\}$ et tout $k \geq 1$. Or, comme $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base symétrique de X, c'est donc en particulier une base inconditionnelle de X et puisque $x \in X$, on a également

$$\left(\prod_{v=1}^{j} a_v \right)^{-1} \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\prod_{v=j+1}^{j+kN} a_v \right)^{-1} x_j b_{j+kN} \in X$$

pour tout $j \in \{0, \dots, N-1\}$. Par conséquent, en divisant par x_j et en sommant pour $j = 0, \dots, N-1$, on obtient $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\prod_{v=1}^{n} a_v \right)^{-1} b_n \in X$, ce qui démontre (iv).

Nous allons maintenant montrer que (iii) implique (i). Supposons donc que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\prod_{v=j+1}^{j+kN} a_v \right)^{-1} b_{j+kN} \in X$. Alors, en particulier, pour $j = 0$ et $N = 1$, on obtient $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\prod_{v=1}^{k} a_v \right)^{-1} b_k \in X$ et donc $\left(\prod_{v=1}^{k} a_v \right)^{-1} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $(b_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$

est une base de Schauder de X. On en déduit que B_a est hypercyclique sur $J(b_i)$ par le Théorème 5.1.

Il reste à montrer que B_a admet un sous-ensemble dense de points périodiques dans $J(b_i)$. Dans ce but, grâce à la Proposition 5.22, pour $N > 1$, on peut poser :

$$g^{(j,N)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\prod_{v=j+1}^{j+kN} a_v \right)^{-1} b_{j+kN} \in X \text{ et } g_J^{(j,N)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\prod_{v=j+1}^{j+kN} a_v \right)^{-1} e_{j+kN} \in J(b_i).$$

Il est clair que si $N \geq j$, alors $B_a^N(g_J^{(j,N)}) = g_J^{(j,N)}$, ainsi tout vecteur $g_J^{(j,N)} \in J(b_i)$ est périodique pour $j \leq N$.
Prenons alors $x = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j$ et $\varepsilon > 0$. On peut supposer, quitte à prendre un multiple de x, que $|x_j \prod_{v=1}^{j} a_v| \leq 1$ pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Lemme 5.26. *Il existe $N \geq m$ tel que pour tout $1 \leq j \leq m$,*

$$\left\| \sum_{k\geq 1} \left(\prod_{v=1}^{j+kN} a_v \right)^{-1} e_{j+kN} \right\|_J \leq \frac{\varepsilon}{m}.$$

Preuve :

Soit $n \geq m$, on va chercher un entier N qui est de la forme αn pour un certain entier naturel α. Par commodité, pour $N > 1$, on pose également

$$h^{(j,N)} := \sum_{k\geq 1} \left(\prod_{v=1}^{j+kN} a_v \right)^{-1} b_{j+kN} \in X \text{ et } h_J^{(j,N)} := \sum_{k\geq 1} \left(\prod_{v=1}^{j+kN} a_v \right)^{-1} e_{j+kN} \in J(b_i).$$

En appliquant le point (a) de la Proposition 5.20, on remarque que $\|h_J^{(j,N)}\|_J \leq 2\|h^{(j,N)}\|_X$. Or pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$, on sait que $h^{(j,N)} \in X$. De plus, il est clair que $\|h^{(j,\alpha n)}\|_X \underset{\alpha \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $1 \leq j \leq m$ car $(b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une base de Schauder de X. Il suffit donc de poser $N = \alpha n$ pour un choix de α suffisamment grand pour que pour tout $1 \leq j \leq m$

$$\|h_J^{(j,N)}\|_J \leq 2\|h^{(j,N)}\|_X \leq \frac{\varepsilon}{m}.$$

□

Une fois le lemme prouvé, posons $y = \sum_{j=1}^{m} x_j g_J^{(j,N)}$. Il est clair que y est un élément de l'espace $J(b_i)$ car c'est une somme de vecteurs de $J(b_i)$. On remarque également que y est aussi un point périodique pour B_a. De plus,

$$\begin{aligned}
\|y - x\|_J &\leq \left\| \sum_{j=1}^{m} x_j (g^{(j,N)} - e_j) \right\|_J \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{m} \left(x_j \prod_{v=1}^{j} a_v \right) \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\prod_{v=1}^{j+kN} a_v \right)^{-1} e_{j+kN} \right) \right\|_J \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \left| x_j \prod_{v=1}^{j} a_v \right| \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\prod_{v=1}^{j+kN} a_v \right)^{-1} e_{j+kN} \right\|_J \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

D'où la densité de l'ensemble des points périodiques de $J(b_i)$ pour B_a.

Ceci conclut la preuve du théorème.

$\square$

On remarque que la principale différence avec le Théorème 5.4 est que les conditions (ii), (iii) et (iv) sont des conditions d'appartenance à l'espace X et pas à l'espace $J(b_i)$ que l'on étudie. Ce type de résultat est valable pour une classe d'espaces plus large que les espaces $J(b_i)$ étudiés ici. En particulier, le contre-exemple donné par Grosse-Erdmann dans son article [28] d'un espace de Banach sans base inconditionnelle (espace pondéré des suites à variations bornées tendant vers 0) pour lequel la caractérisation donnée par le Théorème 5.4 n'est plus valable, admet lui-aussi une caractérisation du même type que celle décrite ci-dessus. En effet, la construction de la norme de l'espace bv_0 des suites à variations bornées tendant vers 0 est très proche de celle de l'espace J_1. On a aussi la majoration évidente :

$$\|x\|_{bv_0} = \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i - x_{i+1}| \leq \|x\|_{J_1}.$$

De fait, le Théorème 5.25 se généralise de la même façon si l'on remplace le sup de la définition de la norme de l'espace de James généralisé par une somme sur tous les indices. Ces espaces deviennent des espaces du type espace de suites à variations bornées tendant vers 0.

On peut se demander s'il existe des décalages pondérés qui admettent un point périodique mais qui ne sont pas chaotiques. D'après le théorème ci-dessus un tel point est forcément un élément de $J(b_i)$ qui n'appartient pas à l'espace X.

On donne une réponse positive en spécialisant $X = \ell^p$ pour $1 \leq p < +\infty$.

Exemple 5.27. Soit $a_k = \left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{1}{p}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Alors B_a est un opérateur borné sur J_p qui admet un point périodique non-nul dans J_p mais qui n'est pas chaotique. En effet, par la Proposition 5.24 pour vérifier que B_a est borné, il suffit de vérifier que $\|a\|_{J_p} < +\infty$. Or ceci est vérifié en utilisant la preuve de la Proposition 5.21 pour une suite décroissante vers un réel quelconque. On en déduit que B_a est borné. Le fait que B_a n'est pas chaotique vient du fait que $\left(\left(\prod_{v=1}^{k} a_v\right)^{-1}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left((k+1)^{-\frac{1}{p}}\right)_{k\in\mathbb{N}} \notin \ell_p$, ainsi la condition (iv) du Théorème 5.25 n'est pas vérifiée.
Enfin, il reste à voir que $\left(\left(\prod_{v=1}^{k} a_v\right)^{-1}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left((k+1)^{-\frac{1}{p}}\right)_{k\in\mathbb{N}} \in J_p$, or cette suite est décroissante ainsi il suffit d'appliquer à nouveau la Proposition 5.21.

A Un critère de supercyclicité pour des opérateurs non-bornés

A.1 Opérateurs hypercycliques non-bornés

En 2001, Bès, Chan et Seubert se sont intéressés à la notion d'hypercyclicité pour des opérateurs linéaires non-bornés. En effet, les opérateurs linéaires continus hypercycliques ont été intensivement étudiés cependant les opérateurs linéaires non-continus ont été beaucoup moins étudiés, on peut citer [11],[17],[9] par exemple. Dans leur article [11], ceux-ci étudient la chaoticité de certains opérateurs de différentiation. Il est bien connu que de tels opérateurs sont linéaires mais ne sont pas toujours bornés. Dans le but d'étudier l'aspect chaotique de ces opérateurs particuliers, Bès, Chan et Seubert ont repris la démonstration historique du critère d'hypercyclicité donné par Kitai dans sa thèse [37] et l'ont modifiée de façon à l'adapter à certains opérateurs non-bornés. Ils ont ainsi pu obtenir un critère d'hypercyclicité pour des opérateurs non-bornés. Deux ans plus tard, toujours dans le but d'étudier des opérateurs chaotiques, de Laubenfels, Emamirad et Grosse-Erdmann donnent un deuxième critère dans l'article [17]. Il semble que ces deux critères ont des applications différentes.

Depuis ces travaux, on peut trouver dans la littérature des travaux sur des opérateurs chaotiques non-bornés mais il semble que personne ne se soit intéressé à un critère de supercyclicité pour des opérateurs non-bornés ni à la caractérisation de tels opérateurs sur ℓ^2. Nous allons commencer par énoncer le critère d'hypercyclicité fourni par Bès, Chan et Seubert :

Théorème (Critère d'hypercyclicité non-borné) A.1. *Soit X un espace de Banach séparable de dimension infinie et T un opérateur linéaire densément défini sur X dont tous les itérés sont des opérateurs fermés. Alors T est hypercyclique s'il existe un sous-ensemble dense $\mathcal{D}$ du domaine de T et une application (éventuellement non-linéaire et non-continue) $S : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ telle que :*

(a) $TS = Id$ sur $\mathcal{D}$,

(b) T^n et S^n convergent simplement vers 0 sur $\mathcal{D}$.

En 2008, Bermúdez, Bonilla et Torrea donnent des conditions nécessaires et suffisantes dans [9] pour qu'un décalage pondéré sur $\ell^2(\mathbb{N})$ (borné ou non) soit hypercyclique ou chaotique.

Théorème (Bermùdez, Bonilla, Correa) A.2. *Soit B_w un opérateur de décalage à gauche pondéré et défini sur $\ell^2(\mathbb{N})$. Alors B_w est hypercyclique si et seulement s'il existe* *une suite* $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *telle que pour tout* $q \in \mathbb{N}$,

$$\max_{0\le\alpha\le q}\left(\prod_{i=1}^{N_k} w_{\alpha+i}\right)^{-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Contre-Exemple A.3. On pourrait être tenté de simplifier cette dernière condition et de la remplacer par la condition pour un décalage pondéré borné. Cependant, cette simplification ne peut pas s'opérer pour des opérateurs non-bornés. En effet, considérons la suite de poids définie par $w_{2^k} = k$, $w_{2^k+1} = \frac{1}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $w_i = 1$ pour $i \neq 2^k, 2^k+1$. Alors un simple calcul montre que $\frac{1}{w_1\ldots w_{2^k}} = \frac{1}{k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, mais il n'existe pas de suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\frac{1}{w_1\ldots w_{N_k}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{1}{w_2\ldots w_{N_k+1}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque A.4. Il est facile de montrer que si l'on suppose en plus que $\inf_{n\in\mathbb{N}}(w_n) > 0$ alors la condition du Théorème A.2 se simplifie radicalement et devient :

$$\liminf_{n\to+\infty}\left(\prod_{i=1}^{n} w_i\right)^{-1} = 0.$$

En fait on peut appliquer le Théorème de Bès, Chan et Seubert aux décalages à poids sur $\ell^p(\mathbb{Z})$ et ainsi caractériser les décalages à poids bilatéraux non-bornés hypercycliques.

Théorème A.5. *Soit* B_w *un décalage pondéré bilatéral (éventuellement non-borné) sur* $\ell^p(\mathbb{Z})$. *Alors* B_w *est hypercyclique si et seulement s'il existe une suite* $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *telle que pour tout* $q \in \mathbb{N}$,

$$\max_{-q\le\alpha\le q}\left(\prod_{i=1}^{N_k} w_{\alpha+i}\right)^{-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ \textit{et} \ \max_{-q\le\alpha\le q}\left(\prod_{i=1}^{N_k} w_{\alpha-i+1}\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{A.1}$$

avec la convention : $\frac{1}{0} = +\infty$.

Remarque A.6. Il est facile de voir que les itérés de B_w sont fermés.

Preuve :

Supposons que B_w est hypercyclique et fixons $q \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, il est clair qu'aucune composante de w n'est nulle. Par densité de l'ensemble des vecteurs hypercycliques dans le domaine de B_w, pour tout choix de $0 < \delta < 1$, il existe un vecteur hypercyclique x et un entier $n > 2q$ tels que :

$$\|x - \sum_{i=-q}^{q} e_i\| < \delta \text{ et } \|B_w^n(x) - \sum_{i=-q}^{q} e_i\| < \delta.$$

En observant les composantes en e_α pour chacune des deux inégalités ci-dessus, on obtient pour tout $-q \le \alpha \le q$,

$$|x_\alpha - 1| < \delta \tag{A.2}$$

$$\left|\left(\prod_{i=1}^{n} w_{\alpha+i}\right) x_{\alpha+n} - 1\right| < \delta \tag{A.3}$$

et pour tout $|\alpha| > q$,

$$|x_\alpha| < \delta \tag{A.4}$$

$$\left|\left(\prod_{i=1}^{n} w_{\alpha+i}\right) x_{\alpha+n}\right| < \delta. \tag{A.5}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, les relations (A.3) et (A.4) donnent pour tout $-q \leq \alpha \leq q$:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} w_{\alpha+i}\right)^{-1} < \frac{\delta}{1-\delta}.$$

Puis en utilisant les relations (A.2) et (A.5), on obtient également pour tout $-q \leq \alpha \leq q$:

$$\prod_{i=1}^{n} w_{\alpha-i+1} = \prod_{i=1}^{n} w_{\alpha-n+i} < \frac{\delta}{1-\delta}.$$

Comme la valeur de δ est arbitrairement petite, on en déduit que pour tout $q \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(N_k(q))_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\lim_{k\to+\infty} \max\left(\max_{-q\leq\alpha\leq q}\left(\prod_{i=1}^{N_k(q)} w_{\alpha+i}\right)^{-1}, \max_{-q\leq\alpha\leq q}\left(\prod_{i=1}^{N_k(q)} w_{\alpha-i+1}\right)\right) = 0.$$

Il reste à trouver une suite (N_k) indépendante de q. Quitte à prendre une sous-suite, pour tout $q \in \mathbb{N}$, on peut supposer que la suite $(N_k(q))_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\max\left(\max_{-q\leq\alpha\leq q}\left(\prod_{i=1}^{N_k(q)} w_{\alpha+i}\right)^{-1}, \max_{-q\leq\alpha\leq q}\left(\prod_{i=1}^{N_k(q)} w_{\alpha-i+1}\right)\right) < 2^{-k}.$$

On peut également supposer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $q \in \mathbb{N}$, $N_k(q) < N_k(q+1)$. Il est alors clair que la suite $(N_k(k))_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie (A.1) et est indépendante de q.

Inversement, si l'on suppose la relation (A.1) et que l'on pose $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$, on va vérifier les hypothèses du Théorème A.1. La aussi, il est clair que toutes les composantes de w sont non-nulles car sinon le premier terme de (A.1) vaut $+\infty$ pour q suffisamment grand. On pose $S : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ tel que $S(e_i) = \frac{e_{i+1}}{w_{i+1}}$, il est clair que S est bien défini et $TS = Id$ sur $\mathcal{D}$. De plus, l'hypothèse (A.1) montre qu'il existe une suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $i \in \mathbb{Z}$:

$$\left\|T^{N_k}(e_i)\right\| = \prod_{j=1}^{N_k} w_{i-j+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et

$$\left\|S^{N_k}(e_i)\right\| = \left(\prod_{j=1}^{N_k} w_{i+j}\right)^{-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Les hypothèses du Théorème A.1 sont bien vérifiées et donc T est hypercyclique.

□

Contre-Exemple A.7. Comme nous l'avons fait auparavant, il est bon de remarquer que l'on ne peut pas remplacer la condition du Théorème précédent par celle plus faible :

$$\left(\prod_{i=1}^{N_k} w_i\right)^{-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \prod_{i=0}^{N_k-1} w_{-i} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ou encore qu'il existe $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$:

$$\left(\prod_{i=1}^{\alpha+N_k} w_i\right)^{-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } \prod_{i=0}^{N_k-\alpha-1} w_{-i} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En effet, il suffit de prendre la même suite de poids que dans le contre-exemple précédent et d'attribuer la valeur $\frac{1}{2}$ aux poids négatifs pour différencier ces conditions.

Une question naturelle est alors de se demander si l'on peut faire la même chose pour les décalages pondérés supercycliques.

A.2 Opérateurs supercycliques non-bornés

Dans la suite, nous allons donner un critère de supercyclicité pour des opérateurs non-bornés, puis nous l'utiliserons dans le cadre de l'étude de décalages pondérés sur $\ell^p(\mathbb{Z})$.

Théorème A.8. *Soit X un espace de Banach séparable de dimension infinie et soit T un opérateur densément défini sur X tel que T^n est fermé pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors T est supercyclique s'il existe un sous-espace dense $\mathcal{D}$ contenu dans le domaine de T et des applications $S_n : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ tels que :*

(a) pour tout $x \in \mathcal{D}$, $T^n(S_n(x)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$;

(b) pour tous $x, y \in \mathcal{D}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\|T^n(x)\|\ \|T^m(S_n(y))\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Avant de montrer ce théorème, nous aurons besoin d'un lemme bien connu.

Lemme A.9. *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Si l'on suppose que $\lim_{n\to+\infty} x_n y_n = 0$, alors il existe $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que :*

$$\lambda_n x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } (\lambda_n)^{-1} y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve :

En effet, si l'on suppose que $x_n \neq 0$ et $y_n \neq 0$, on prend $\lambda_n = \sqrt{\frac{\|y_n\|}{\|x_n\|}}$ sinon on pose $\lambda_n = \frac{1}{n x_n}$ si $y_n = 0$ et $\lambda_n = n y_n$ si $x_n = 0$.

□

Preuve du théorème :

Soit $\{y_k, k \in \mathbb{N}\}$ un sous-ensemble dense de $\mathcal{D}$.

On commence par construire par récurrence une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$, une suite de réels positifs $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$, et une suite d'entiers strictement croissante $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

(I) $\|x_k\| < 2^{-k}$;

(II) $\|\lambda_k T^{m_k}(x_k) - y_k\| < 2^{-k}$;

(III) Pour tout $i < k$, $\|\lambda_k T^{m_k}(x_i)\| < 2^{-k}$;

(IV) Pour tout $i < k$, $\|(\lambda_k)^{-1} T^{m_i}(\lambda_i S_{m_k}(y_k))\| < 2^{-k}$.

Remarquons que (b) implique que $\|T^n(y_0)\| \; \|S_n(y_0)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On peut alors trouver $m_0 \in \mathbb{N}$ et $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$ vérifiant $(\lambda_0)^{-1}\|S_{m_0}(y_0)\| < 1$ et $\lambda_0\|T^{m_0}(y_0)\| < 1$ grâce au Lemme A.9. De plus, en choisissant m_0 suffisamment grand, la relation (a) nous assure que $\|T^{m_0}(S_{m_0}(y_0)) - y_0\| < 1$. On pose alors $x_0 = (\lambda_0)^{-1} S_{m_0}(y_0)$ qui vérifie bien (I) et (II), ceci termine l'initialisation.
Supposons à présent que l'on a construit les suites jusqu'au rang k. Comme pour tout $i \leq k$, $x_i \in \mathcal{D}$ et pour tout $i \leq k+1$, $y_i \in \mathcal{D}$ on a par (b) :

$$\left(\sum_{i=0}^{k} \|T^n(x_i)\|\right)\left(\sum_{i=0}^{k} \|T^{m_i}(\lambda_i S_n(y_{k+1})\| + \|S_n(y_{k+1})\|\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car en développant, on a la convergence vers 0 terme à terme. Ainsi, le Lemme A.9 assure l'existence d'une suite $(\lambda_{k+1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $i \leq k$:

$$\begin{cases} \lambda_{k+1}^n \|T^n(x_i)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \left(\lambda_{k+1}^n\right)^{-1} \|T^{m_i}(\lambda_i S_n(y_{k+1})\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \left(\lambda_{k+1}^n\right)^{-1} \|S_n(y_{k+1})\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

Il reste à choisir $m_{k+1} > m_k$ de façon que pour tout $i \leq k$:

$$\begin{cases} \lambda_{k+1}^{m_{k+1}} \|T^{m_{k+1}}(x_i)\| < 2^{-(k+1)}; \\ \left(\lambda_{k+1}^{m_{k+1}}\right)^{-1} \|T^{m_i}(\lambda_i S_{m_{k+1}}(y_{k+1})\| < 2^{-(k+1)}; \\ \left(\lambda_{k+1}^{m_{k+1}}\right)^{-1} \|S_{m_{k+1}}(y_{k+1})\| < 2^{-(k+1)}. \end{cases}$$

De plus, quitte à augmenter la valeur de m_{k+1}, on peut imposer également que

$$\|T^{m_{k+1}}(S_{m_{k+1}}(y_{k+1})) - y_{k+1}\| < 2^{-(k+1)}$$

grâce à la relation (a) du Théorème. On pose alors $x_{k+1} = \left(\lambda_{k+1}^{m_{k+1}}\right)^{-1} S_{m_{k+1}}(y_{k+1})$ et $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+1}^{m_{k+1}}$. On a donc (II) par la remarque ci-dessus. La troisième inégalité ci-dessus implique alors (I), la première (III) et la deuxième (IV). Ce qui termine la récurrence.
On pose alors $x = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i$ et on veut montrer que x est supercyclique pour T. On commence par montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=k+1}^{+\infty} x_i$ est dans le domaine de T^{m_k}. Fixons $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=k+1}^{N} x_i, \lambda_k T^{m_k}\left(\sum_{i=k+1}^{N} x_i\right)\right) &= \left(\sum_{i=k+1}^{N} x_i, \lambda_k T^{m_k}\left(\sum_{i=k+1}^{N} (\lambda_i)^{-1} S_{m_i}(y_i)\right)\right) \\ &= \left(\sum_{i=k+1}^{N} x_i, \sum_{i=k+1}^{N} (\lambda_i)^{-1} \lambda_k T^{m_k}\left(S_{m_i}(y_i)\right)\right) \\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} x_i, \sum_{i=k+1}^{+\infty} (\lambda_i)^{-1} \lambda_k T^{m_k}\left(S_{m_i}(y_i)\right)\right) \quad \text{par (I) et (IV).} \end{aligned}$$

Or comme T^{m_k} est fermé, $\lambda_k T^{m_k}$ l'est aussi et donc $\sum_{i=k+1}^{+\infty} x_i$ est dans le domaine de T^{m_k}, ainsi

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} \lambda_k T^{m_k}(x_i) = \lambda_k T^{m_k}\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} x_i\right).$$

On s'intéresse alors à :

$$\begin{aligned}\|\lambda_k T^{m_k}(x) - y_k\| &\leq \|\sum_{j<k} \lambda_k T^{m_k}(x_j)\| + \|\lambda_k T^{m_k}(x_k) - y_k\| + \|\sum_{j>k} \lambda_k T^{m_k}(x_j)\| \\ &\leq \sum_{j<k} 2^{-k} + 2^{-k} + \sum_{j>k} 2^{-j} \text{ par (III),(II) et (IV)} \\ &= 2^{-k}(k+2) \\ &\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Soit alors $\varepsilon > 0$ et $y \in X$, on obtient par l'inégalité triangulaire

$$\|\lambda_k T^{m_k}(x) - y\| \leq \|\lambda_k T^{m_k}(x) - y_k\| + \|y_k - y\|.$$

Or $\{y_k, k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans X et l'on a vu ci-dessus que $\|\lambda_k T^{m_k}(x) - y_k\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi il existe un entier k vérifiant à la fois $\|\lambda_k T^{m_k}(x) - y_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|y_k - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où $\|\lambda_k T^{m_k}(x) - y\| < \varepsilon$.
Ce qui montre que x est un vecteur supercyclique pour T.

□

Remarque A.10. On peut remarquer que le théorème ci-dessus est toujours valable si la suite des entiers naturels est remplacée par une sous-suite dans les hypothèses (a) et (b).

Théorème A.11. *Si T vérifie le critère de supercyclicité non-borné ci-dessus alors $T \oplus T$ est aussi supercyclique.*

Preuve :
Si l'on suppose que T vérifie le critère de supercyclicité non-borné, alors la preuve est mot pour mot la preuve du critère que l'on vient de faire ci-dessus sauf que l'on considère l'opérateur $T \oplus T$ au lieu de T et $S \oplus S$ au lieu de S et l'on travaille sur une énumération de $\mathcal{D}^2$ au lieu de $\mathcal{D}$.

□

On peut appliquer ce critère pour obtenir une caractérisation des décalages pondérés sur ℓ^p qui sont supercycliques.

Théorème A.12. *Soit B_w un décalage pondéré bilatéral (éventuellement non-borné) sur $\ell^p(\mathbb{Z})$. Alors B_w est supercyclique si et seulement s'il existe une suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $q \in \mathbb{N}$,*

$$\max_{-q\leq\alpha\leq q}\left(\prod_{i=1}^{N_k} w_{\alpha+i}\right)^{-1} \times \max_{-q\leq\alpha\leq q}\left(\prod_{i=1}^{N_k} w_{\alpha-i+1}\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{A.6}$$

avec les conventions : $\frac{1}{0} = +\infty$ et $+\infty \times 0 = +\infty$.

Remarque A.13. Il peut être utile de remarquer que la condition du théorème ci-dessus est équivalente à la condition suivante :

$$\max\left(\frac{\prod_{i=1}^{N_k} w_{\alpha-i+1}}{\prod_{i=1}^{N_k} w_{\beta+i}}, |\alpha|, |\beta| \leq q\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{A.7}$$

ou encore à la condition

$$\max\left(\frac{\prod_{i=0}^{\alpha-N_k+1} w_i}{\prod_{i=1}^{\beta+N_k} w_i}, |\alpha|, |\beta| \leq q\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{A.8}$$

En effet, comme pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $w_i \neq 0$ il est clair que les valeurs :
$\max\left(\prod_{i=1}^{\alpha} w_i \prod_{j=1}^{\beta} w_i, 0 \leq \alpha \leq q, 0 \leq \beta \leq q\right)$, $\max\left(\frac{\prod_{j=1}^{\beta} w_i}{\prod_{i=1}^{\alpha} w_i}, -q \leq \alpha \leq 0, 0 \leq \beta \leq q\right)$,
$\max\left(\frac{\prod_{i=1}^{\alpha} w_i}{\prod_{j=1}^{\beta} w_i}, 0 \leq \alpha \leq q, -q \leq \beta \leq 0\right)$ et $\max\left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{\alpha} w_i \prod_{j=1}^{\beta} w_i}, -q \leq \alpha \leq 0, -q \leq \beta \leq 0\right)$
sont bornées supérieurement par une constante qui dépend de q et de même si l'on remplace le max par un min, alors ces valeurs sont bornées inférieurement par une constante qui dépend de q. Ceci justifie l'équivalence des convergences des suites (A.7) et (A.8).

Preuve :

Supposons que B_w est supercyclique et fixons $q \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, il est clair qu'aucune composante de w n'est nulle. Comme pour le cas hypercyclique, par densité de l'ensemble des vecteurs supercycliques dans le domaine de B_w, pour tout choix de $0 < \delta < 1$, il existe un vecteur supercyclique x, un entier $n > 2q$ et un scalaire λ tels que pour tout $-q \leq \alpha \leq q$:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} w_{\alpha+i}\right)^{-1} < \frac{|\lambda|\delta}{1-\delta}$$

et

$$\prod_{i=1}^{n} w_{\alpha-i+1} = \prod_{i=1}^{n} w_{\alpha-n+i} < \frac{\delta}{|\lambda|(1-\delta)}.$$

Comme la valeur de δ est arbitrairement petite, on en déduit que pour tout $q \in \mathbb{N}$, il existe une suite $(N_k(q))_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\lim_{k\to+\infty} \max_{-q\leq\alpha\leq q} \left(\prod_{i=1}^{N_k(q)} w_{\alpha+i}\right)^{-1} \times \max_{-q\leq\alpha\leq q} \left(\prod_{i=1}^{N_k(q)} w_{\alpha-i+1}\right) = 0.$$

Comme pour le cas hypercyclique, un argument diagonal permet de s'affranchir de la dépendance en q.

Inversement, si l'on suppose la relation (A.6) et que l'on pose $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$, on va vérifier les hypothèses du Théorème A.8. La aussi, il est clair que toutes les composantes de w sont non-nulles car sinon le premier terme de (A.6) vaut $+\infty$ pour q suffisamment grand. De plus, $\mathcal{D}$ est clairement dense contenu dans le domaine de B_w et invariant par B_w. On pose $S : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ tel que $S(e_i) = \frac{e_{i+1}}{w_{i+1}}$, il est clair que S est bien défini et $TS = ST = Id$ sur $\mathcal{D}$ donc on a la condition (a) du Théorème A.8. De plus, l'hypothèse (A.6) montre qu'il existe une suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\left\|T^{N_k}(e_\alpha)\right\| \times \|T^m(S_{N_k}(e_\beta))\| &= \left(\prod_{i=\alpha}^{\alpha-N_k+1} w_i\right)\left(\prod_{i=\beta+1}^{\beta+N_k-m} w_i\right)^{-1} \\ &= \prod_{i=1}^{N_k} w_{\alpha-i+1}\left(\prod_{i=1+m}^{N_k} w_{\beta-m+i}\right)^{-1} \\ &= \prod_{i=1}^{N_k} w_{\alpha-i+1}\left(\prod_{i=1}^{N_k} w_{\beta-m+i}\right)^{-1}\prod_{i=1}^{m} w_{\beta-m+i} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Les hypothèses du Théorème A.8 sont bien vérifiées et donc T est supercyclique.

$\square$

Contre-Exemple A.14. Là encore, on ne peut pas remplacer la condition du théorème précédent par celle plus faible qu'il existe $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $q \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\prod_{i=0}^{q-N_k+1} w_i}{\prod_{i=1}^{q+N_k} w_i} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En effet, posons pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $w_i = w_{-i} = i$ et $w_0 = 1$. Alors pour toute suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et tout $q \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\prod_{i=0}^{q-N_k+1} w_i}{\prod_{i=1}^{q+N_k} w_i} = \left(\prod_{i=N_k-q}^{q+N_k} w_i\right)^{-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En revanche pour toute suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$, prenons $\alpha = 0$ et $\beta = -2$, alors

$$\frac{\prod_{i=0}^{\alpha-N_k+1} w_i}{\prod_{i=1}^{\beta+N_k} w_i} = \frac{\prod_{i=0}^{N_k-1} w_i}{\prod_{i=1}^{N_k-2} w_i} = w_{N_k-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \neq 0.$$

C'est donc encore vrai pour le max pour $q \geq 2$, donc ceci ne vérifie pas (A.8).

B Une condition suffisante de mélange fort pour les opérateurs linéaires

Dans cette section, on se propose de montrer que plusieurs notions de mélange coïncident dans le cas d'un opérateur linéaire sur un espace de Banach muni d'une mesure gaussienne. Ceci généralise certains résultats obtenus par Totoki [51] dans le cadre de processus gaussiens et de Bayart et Matheron [7] qui ont donné une condition nécessaire et suffisante portant sur l'opérateur de covariance associé à une mesure gaussienne de support plein pour qu'un opérateur soit mélangeant. Dans toute cette partie, on supposera que X est un espace de Banach séparable muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}$.

Lorsqu'on travaille sur des espaces mesurés, il est commode d'utiliser des applications qui préservent la structure de tels espaces. C'est le rôle des applications présentées dans la définition ci-dessous.

Définition B.1. Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilités. On dit qu'une application $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ préserve la mesure si pour tout $A \in \mathcal{B}$, $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$.

On peut maintenant introduire les applications fortement mélangeantes qui sont les applications qui vont nous intéresser dans cette section.

Définition B.2. Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilités et $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ une application qui préserve la mesure. On dit que T est fortement mélangeante par rapport à μ si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

(i) pour tous $A, B \in \mathcal{B}$, $\mu(A \cap T^{-n}(B)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mu(A)\mu(B)$;

(ii) pour tous $f, g \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, $\int_X f(T^n(x))g(x)d\mu(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_X f\ d\mu \int_X g\ d\mu$.

De même, pour tout $N \geq 1$, on dit que T est multiple mélangeant de degré N par rapport à μ si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

(i) pour tous $A_0, \dots, A_N \in \mathcal{B}$,

$$\mu\left(A_0 \cap_{k=1}^N T^{-\sum_{j=1}^k n_j}(A_k)\right) \underset{n_1, \dots, n_N \to +\infty}{\longrightarrow} \prod_{k=0}^N \mu(A_k);$$

(ii) pour tous $f_0, \dots, f_N \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$,

$$\int_X f_0(x) \prod_{k=1}^N f_k(T^{\sum_{j=1}^k n_j}(x))d\mu(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \prod_{k=0}^N \int_X f_k\ d\mu.$$

Il est clair que si une application est multiple mélangeante de degré N, alors elle est également multiple mélangeante de tout degré k pour $k \leq N$. On remarque aussi que la définition d'un opérateur fortement mélangeant pour une mesure dont le support est plein est plus forte que la définition topologique d'un opérateur mélangeant.

Définition B.3. Un ensemble A de X est dit cylindrique s'il existe $p \geq 1$, p vecteurs linéairement indépendants $x_1^*, \dots, x_p^*$ de X^* et un borélien $E \subset \mathbb{C}^p$ tels que $A = \big\{x \in X : \big(\langle x_1^*, x\rangle, \dots, \langle x_p^*, x\rangle\big) \in E\big\}$. On appelle tribu cylindrique la tribu engendrée par les ensembles cylindriques.

La proposition suivante est adaptée du livre [52] dans lequel Walters donne une telle réduction pour les différentes notions de mélange et d'ergodicité.

Proposition B.4. *Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilité et $\mathscr{S}$ une semi-algèbre qui engendre $\mathcal{B}$. Soit $T : X \to X$ un opérateur qui préserve la mesure μ, alors T est multiple mélangeant de degré $N \geq 1$ si et seulement si pour tous $A_0, \dots, A_N \in \mathscr{S}$,*

$$\mu\left(A_0 \cap_{k=1}^N T^{-\sum_{j=1}^k n_j}(A_k)\right) \underset{n_1,\dots,n_N \to +\infty}{\longrightarrow} \prod_{k=0}^N \mu(A_k).$$

Preuve :

D'après [44] tout élément de l'algèbre engendrée par $\mathscr{S}$ s'écrit comme une réunion disjointe finie d'éléments de $\mathscr{S}$. Il est donc clair que si l'on a le résultat pour la semi-algèbre $\mathscr{S}$ alors on l'a aussi pour l'algèbre engendrée par $\mathscr{S}$. Supposons donc que l'on a la propriété pour l'algèbre engendrée par $\mathscr{S}$. Soit $\varepsilon > 0$ et $A_0, \dots, A_N \in \mathcal{B}$. Par un théorème d'approximation de Kingman et Taylor de [36] (p.84), on sait qu'on peut trouver des éléments $B_0, \dots, B_N$ de l'algèbre engendrée par $\mathscr{S}$ vérifiant pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$, $\mu(A_i \Delta B_i) < \varepsilon$. Pour des raisons de commodité d'écriture, tout N-uplet d'entiers naturels sera noté $\mathbf{n} := (n_1, \dots, n_N)$ et on note également $\mathbf{n}^i = \sum_{j=1}^i n_i$ pour $1 \leq i \leq N$ et $\mathbf{n}^0 = 0$. Pour tout $\mathbf{n}$, une propriété bien connue de la différence symétrique implique que

$$\left(\cap_{k=0}^N T^{-\mathbf{n}^k}(A_k)\right) \Delta \left(\cap_{k=0}^N T^{-\mathbf{n}^k}(B_k)\right) \subset \cup_{k=0}^N \left(T^{-\mathbf{n}^k}(A_k) \Delta T^{-\mathbf{n}^k}(B_k)\right).$$

En appliquant la mesure μ et grâce à la T-invariance de μ, on obtient donc :

$$\mu\left(\left(\cap_{k=0}^N T^{-\mathbf{n}^k}(A_k)\right) \Delta \left(\cap_{k=0}^N T^{-\mathbf{n}^k}(B_k)\right)\right) < (N+1)\varepsilon.$$

Ainsi, $\mu\left(\cap_{k=0}^N T^{-\mathbf{n}^k}(A_k)\right) - \mu\left(\cap_{k=0}^N T^{-\mathbf{n}^k}(B_k)\right) < (N+1)\varepsilon$.

On peut à présent décomposer avec l'inégalité triangulaire

$$
\begin{aligned}
\left|\mu\left(\cap_{k=0}^{N} T^{-\mathbf{n}^k}(A_k)\right) - \prod_{k=0}^{N}\mu(A_k)\right| &\le \left|\mu\left(\cap_{k=0}^{N} T^{-\mathbf{n}^k}(A_k)\right) - \mu\left(\cap_{k=0}^{N} T^{-\mathbf{n}^k}(B_k)\right)\right| \\
&+ \left|\mu\left(\cap_{k=0}^{N} T^{-\mathbf{n}^k}(B_k)\right) - \prod_{k=0}^{N}\mu(B_k)\right| \\
&+ \sum_{i=0}^{N}\left(\prod_{k=0}^{i-1}\mu(A_k)\right)\left(\prod_{k=i+1}^{N}\mu(B_k)\right)|\mu(B_i)-\mu(A_i)| \\
&\le (N+1)\varepsilon + \left|\mu\left(\cap_{k=0}^{N} T^{-\mathbf{n}^k}(B_k)\right) - \prod_{k=0}^{N}\mu(B_k)\right| + (N+1)\varepsilon \\
&\le 2(N+1)\varepsilon + \left|\mu\left(\cap_{k=0}^{N} T^{-\mathbf{n}^k}(B_k)\right) - \prod_{k=0}^{N}\mu(B_k)\right|.
\end{aligned}
$$

Ce qui termine la preuve puisque les éléments B_k appartiennent à l'algèbre engendrée par $\mathscr{S}$, ainsi en choisissant $\mathbf{n}$ suffisamment grand, on peut rendre $\left|\mu\left(\cap_{k=0}^{N} T^{-\mathbf{n}^k}(B_k)\right) - \prod_{k=0}^{N}\mu(B_k)\right|$ aussi petit que l'on souhaite.

□

Dans [7], Bayart et Matheron ont cherché à obtenir une condition impliquant l'opérateur de covariance pour assurer l'aspect fortement mélangeant d'un opérateur linéaire par rapport à une mesure gaussienne sur un espace de Banach. D'autre part en 1964, Totoki [51] a montré que dans le cas des processus gaussiens, il y a équivalence entre être fortement mélangeant et multiple mélangeant de tout degré. Cela soulève la question de savoir ce qu'il en est pour des opérateurs agissant sur un espace de Banach muni d'une mesure gaussienne. Le théorème suivant montre que dans ce cas aussi, les deux notions sont équivalentes et améliore donc certains résultats obtenus par Bayart et Grivaux [4].

Théorème B.5. *Soit μ une mesure de Borel gaussienne sur X de support plein et d'opérateur de covariance R_μ. Soit T un opérateur linéaire continu sur X. Supposons de plus que μ est T-invariante. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) T est fortement mélangeant ;

(ii) T est multiple mélangeant de tout degré,

(iii) pour tous $x^*, y^* \in X^*$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\langle R_\mu T^{*n}(x^*), y^*\rangle = 0,$$

Nous allons avoir besoin, pour la preuve, d'un lemme que l'on peut trouver dans [7]. La preuve y est faite pour une convergence relativement à un seul paramètre mais elle se généralise mot pour mot à une convergence sur plusieurs paramètres.

Lemme B.6. *Soient $N \in \mathbb{N}$ et $\nu_{\mathbf{n}}$ une mesure gaussienne sur un certain espace de dimension finie E et ceci pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^N$. Soit également ν une mesure gaussienne de support plein sur E. Supposons que $R_{\nu_{\mathbf{n}}} \underset{\mathbf{n}\to+\infty}{\longrightarrow} R_\nu$, alors pour tout borélien $Q \subset E$, $\nu_{\mathbf{n}}(Q) \underset{\mathbf{n}\to+\infty}{\longrightarrow} \nu(Q)$.*

Preuve du théorème :

L'équivalence (i)$\Leftrightarrow$(iii) est démontrée dans [7] et le sens (ii)$\Rightarrow$(i) est trivial. Il reste à montrer (iii)$\Rightarrow$(ii).
Soit $N \geq 1$. Comme X est séparable, la tribu cylindrique et la tribu borélienne coïncident. De plus, comme l'ensemble des ensembles cylindriques est une algèbre, on remarque que la Proposition B.4 permet de réduire le problème. En effet, il suffit de montrer que pour tout choix d'ensembles cylindriques $A_0, \dots, A_N$,

$$\mu\left(A_0 \cap_{k=1}^N T^{-\sum_{j=1}^k n_j}(A_k)\right) \underset{n_1,\dots,n_N\to+\infty}{\longrightarrow} \prod_{k=0}^N \mu(A_k).$$

Fixons donc pour tout $0 \leq i \leq N$, $A_i = \pi_i^{-1}\left(\widetilde{A_i}\right)$ où $\pi_i : X \to \mathbb{C}^{p_i}$ est une application linéaire continue vérifiant $\pi_i(x) = \left(\langle x_1^{i*}, x\rangle, \dots, \langle x_{p_i}^{i*}, x\rangle\right)$ et où $x_1^{i*}, \dots, x_{p_i}^{i*}$ est une famille libre de p_i vecteurs de X^*. Il est clair que π_i est surjective pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$.
Pour tout N-uplet d'entiers naturels $\mathbf{n} := (n_1, \dots, n_N)$, on note $\mathbf{n}^i = \sum_{j=1}^i n_j$ pour $1 \leq i \leq N$ et $\mathbf{n}^0 = 0$ puis on définit l'application linéaire

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{n}} : X &\to \prod_{i=0}^N \mathbb{C}^{p_i} \\ x &\mapsto \left(\pi_1(T^{\mathbf{n}^0}(x)), \dots, \pi_N(T^{\mathbf{n}^N}(x))\right). \end{aligned}$$

Grâce à cette application, il est maintenant facile d'exprimer

$$A_0 \cap_{k=1}^N T^{-\sum_{j=1}^k n_j}(A_k) = L_{\mathbf{n}}^{-1}(\prod_{i=0}^N \widetilde{A_i}).$$

A présent, en notant $\nu_{\mathbf{n}} := \mu \circ L_{\mathbf{n}}^{-1}$ la mesure image de μ par $L_{\mathbf{n}}$ et $\mu_i := \mu \circ \pi_i^{-1}$ la mesure image de μ par π_i, il est clair qu'il suffit de montrer que :

$$\nu_{\mathbf{n}}(\prod_{i=0}^N \widetilde{A_i}) \underset{\mathbf{n}\to+\infty}{\longrightarrow} (\otimes_{i=0}^N \mu_i)(\prod_{j=0}^N \widetilde{A_j}).$$

Il est facile de remarquer que comme $\nu_{\mathbf{n}}$ est la mesure image d'une mesure gaussienne par une application linéaire continue, $\nu_{\mathbf{n}}$ est aussi une mesure gaussienne. De la même façon, on vérifie aisément que $\otimes_{i=0}^N \mu_i$ est gaussienne et de support plein car les projections $\pi_0, \dots, \pi_N$ sont surjectives. On peut ainsi utiliser le lemme énoncé avant la preuve, il reste donc à montrer que :

$$R_{\nu_{\mathbf{n}}} \underset{\mathbf{n}\to+\infty}{\longrightarrow} R_{\otimes_{m=0}^N \mu_m}. \tag{B.1}$$

Dans la suite, nous identifions l'espace $\prod_{i=0}^N \mathbb{C}^{p_i}$ et l'espace $\mathbb{C}^q$ où $q = p_0 + \ldots + p_N$. Pour tout $0 \leq i \leq N$, nous noterons $\{e_1^i, \dots, e_{p_i}^i\}$ la base canonique de $\mathbb{C}^{p_i}$ de sorte que la concaténation de ces bases pour $i = 0, \dots, N$ forme une base de $\mathbb{C}^q$. Nous utiliserons les mêmes notations (mais étoilées) pour les bases duales canoniques de ces mêmes espaces.

Ainsi, pour vérifier la convergence (B.1), il suffit de vérifier que pour tous $i, j \in \{0, \dots, N\}$ et tout $k \in \{1, \dots, p_i\}$ et $l \in \{1, \dots, p_i\}$,

$$\langle R_{\nu_{\mathbf{n}}}(e_k^{i*}), e_l^{j*}\rangle \underset{\mathbf{n}\to+\infty}{\longrightarrow} \langle R_{\otimes_{m=0}^N \mu_m}(e_k^{i*}), e_l^{j*}\rangle.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\langle R_{\otimes_{m=0}^N \mu_m}(e_k^{i*}), e_l^{j*}\rangle &= \langle R_{\mu_i}(e_k^{i*}), e_l^{j*}\rangle \\
&= \int_{\mathbb{C}^{p_i}} \overline{\langle e_k^{i*}, x\rangle}\langle e_l^{j*}, x\rangle \; d\mu_i(x) \\
&= \int_X \overline{\langle e_k^{i*}, \pi_i(z)\rangle}\langle e_l^{j*}, \pi_i(z)\rangle \; d\mu(z) \text{ car } \mu_i = \mu\circ\pi_i^{-1} \\
&= \begin{cases} \int_X \overline{\langle x_k^{i*}, z\rangle}\langle x_l^{i*}, z\rangle \; d\mu(z) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \\
&= \begin{cases} \langle R_\mu(x_k^{i*}), x_l^{i*}\rangle & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\langle R_{\nu_{\mathbf{n}}}(e_k^{i*}), e_l^{j*}\rangle &= \int_{\mathbb{C}^q} \overline{\langle e_k^{i*}, x\rangle}\langle e_l^{j*}, x\rangle \; d\nu_{\mathbf{n}}(x) \\
&= \int_X \overline{\langle e_k^{i*}, L_{\mathbf{n}}(z)\rangle}\langle e_l^{j*}, L_{\mathbf{n}}(z)\rangle \; d\mu(z) \\
&= \int_X \overline{\langle x_k^{i*}, T^{\mathbf{n}^i}(z)\rangle}\langle x_l^{j*}, T^{\mathbf{n}^j}(z)\rangle \; d\mu(z) \\
&= \int_X \overline{\langle T^{\mathbf{n}^i *}(x_k^{i*}), z\rangle}\langle T^{\mathbf{n}^j *}(x_l^{j*}), z\rangle \; d\mu(z) \\
&= \langle R_\mu T^{\mathbf{n}^i *}(x_k^{i*}), T^{\mathbf{n}^j *}(x_l^{j*})\rangle \\
&= \begin{cases} \langle R_\mu T^{\mathbf{n}^i - \mathbf{n}^j *}(x_k^{i*}), x_l^{j*}\rangle & \text{si } i > j \\ \langle R_\mu(x_k^{i*}), x_l^{i*}\rangle & \text{si } i = j \;\; \text{par } T\text{-invariance de } \mu \\ \langle R_\mu(x_k^{i*}), T^{\mathbf{n}^j - \mathbf{n}^i *}(x_l^{j*})\rangle & \text{si } i < j \end{cases}
\end{aligned}$$

Par hypothèse, il est clair que pour $i > j$, $\langle R_\mu T^{\mathbf{n}^i - \mathbf{n}^j *}(x_k^{i*}), x_l^{j*}\rangle \underset{\mathbf{n}\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et si $i < j$, on a

$$\langle R_\mu(x_k^{i*}), T^{\mathbf{n}^j - \mathbf{n}^i *}(x_l^{j*})\rangle = \langle R_\mu T^{\mathbf{n}^j - \mathbf{n}^i *}(x_l^{j*}), x_k^{i*}\rangle \underset{\mathbf{n}\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc,

$$\langle R_{\nu_{\mathbf{n}}}(e_k^{i*}), e_l^{j*}\rangle \underset{\mathbf{n}\to+\infty}{\longrightarrow} \langle R_{\otimes_{m=0}^N \mu_m}(e_k^{i*}), e_l^{j*}\rangle$$

et l'on a montré que T est multiple mélangeant de degré N.

□

Ce résultat complète le Théorème 5.40 donné par Bayart et Matheron dans [7] (p119) qui améliore lui-même les résultats de Bayart et Grivaux contenus dans [4].

Bibliographie

[1] S.I. Ansari. Hypercyclic and cyclic vectors. *J. Funct. Anal.*, 128(2) :374 – 383, 1995.

[2] S.I. Ansari and P.S. Bourdon. Some properties of cyclic operators. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 63(1-2) :195–207, 1997.

[3] F. Bayart. m-isometries on banach spaces. *Math. Nachr.*, 284(17-18) :2141–2147, 2011.

[4] F. Bayart and S. Grivaux. Invariant gaussian measures for operators on banach spaces and linear dynamics. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 94(1) :181–120, 2007.

[5] F. Bayart and É. Matheron. Hyponormal operators, weighted shifts and weak forms of supercyclicity. *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, 49(1) :1–15, 2006.

[6] F. Bayart and É. Matheron. Hypercyclic operators failing the hypercyclicity criterion on classical banach spaces. *J. Funct. Anal.*, 250(2) :426–441, 2007.

[7] F. Bayart and É. Matheron. *Dynamics of linear operators.* Cambridge tracts in mathematics. Cambridge University Press, 2009.

[8] T. Bermúdez, A. Bonilla, and A. Peris. On hypercyclicity and supercyclicity criteria. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 70 :45–54, 7 2004.

[9] T. Bermúdez, A. Bonilla, and J.L. Torrea. Chaotic behavior of the Riesz transforms for Hermite expansions. *J. Math. Anal. Appl.*, 337(1) :702–711, 2008.

[10] T. Bermúdez, I. Marrero, and A. Martinón. On the orbit of an m-isometry. *Integral Equations Operator Theory*, 64(4) :487–494, 2009.

[11] J. Bès, K.C. Chan, and S.M. Seubert. Chaotic unbounded differentiation operators. *Integral Equations Operator Theory*, 40 :257–267, 2001.

[12] J. Bès and A. Peris. Hereditarily hypercyclic operators. *J. Funct. Anal.*, 167(1) :94–112, 1999.

[13] P. S. Bourdon, N. S. Feldman, and J. H. Shapiro. Some properties of N-supercyclic operators. *Studia Math.*, 165(2) :135–157, 2004.

[14] P.S. Bourdon and J.H. Shapiro. *Cyclic Phenomena for Composition Operators.* Number 596 in American Mathematical Society : Memoirs of the American Mathematical Society. American Mathematical Society, 1997.

[15] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Universitext (Berlin. Print). Springer, 2010.

[16] M. De la Rosa and C. Read. A hypercyclic operator whose direct sum $T \oplus T$ is not hypercyclic. *J. Operator Theory*, 61(2) :369–380, 2009.

[17] R. deLaubenfels, H. Emamirad, and K.-G. Grosse-Erdmann. Chaos for semigroups of unbounded operators. *Math. Nachr.*, 261-262(1) :47–59, 2003.

[18] R.L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley studies in nonlinearity. Westview Press, 2003.

[19] N.S. Feldman. n-supercyclic operators. *Studia Math.*, 151(2) :141–159, 2002.

[20] N.S. Feldman, V.G. Miller, and T.L. Miller. Hypercyclic and supercyclic cohyponormal operators. *Acta Sci.Math. (Szeged)*, 68 :303–328, 2002. Corrected reprint : *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 68 : 965-990, 2002.

[21] H. Fetter and B.G. de Buen. *The James Forest*. Lecture note series. Cambridge University Press, 1997.

[22] E.A. Gallardo-Gutiérrez and A. Montes-Rodríguez. The role of the angle in supercyclic behavior. *J. Funct. Anal.*, 203(1) :27 – 43, 2003.

[23] E.A. Gallardo-Gutiérrez and A. Montes-Rodríguez. *The Role of the Spectrum in the Cyclic Behavior of Composition Operators*. Number 791 in Memoirs of the American Mathematical Society. American Mathematical Society, 2004.

[24] E.A. Gallardo-Gutiérrez and J.R. Partington. Supercyclic vectors and the angle criterion. *Studia Math.*, 166 :93–99, 2005. **3, C**.

[25] G. Godefroy and J.H. Shapiro. Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds. *J. Funct. Anal.*, 98(2) :229 – 269, 1991.

[26] I. Gohberg, S. Goldberg, and A. Kaashoek. *Classes of linear operators*. Number vol. 1 in Operator theory. Birkhäuser Verlag, 1990.

[27] S. Grivaux. Hypercyclic operators, mixing operators, and the bounded steps problem. *J. Operator Theory*, 54(1) :147–168, 2005.

[28] K.-G. Grosse-Erdmann. Hypercyclic and chaotic weighted shifts. *Studia Math.*, 139(1) :47–68, 2000.

[29] K.-G. Grosse-Erdmann and A. Peris. *Linear Chaos*. Universitext Series. Springer, 2011.

[30] G.H. Hardy and E.M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford science publications. Clarendon Press, 1979.

[31] G. Herzog. On linear operators having supercyclic vectors. *Studia Math.*, 103(3) :295–298, 1992.

[32] H. M. Hilden and L. J. Wallen. Some cyclic and non-cyclic vectors of certain operators. *Indiana Univ. Math. J.*, 23 :557–565, 1973/74.

[33] M.W. Hirsch, S. Smale, and R.L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Pure and applied mathematics. Academic Press, 2004.

[34] R.C. James. Bases and reflexivity of banach spaces. *Ann. of Math.*, 52(3) :pp. 518–527, 1950.

[35] R.C. James. A non-reflexive banach space isometric with its second conjugate space. *Proc. Nati. Acad. Sci. USA*, 37(3) :174–177, 1951.

[36] J.F.C. Kingman and S.J. Taylor. *Introduction to Measure and Probability*. Cambridge University Press, 2008.

[37] C. Kitai. *Invariant closed sets for linear operators*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1982. Thesis (Ph.D.)–University of Toronto (Canada).

[38] F. León-Saavedra and V. Müller. Rotations of hypercyclic and supercyclic operators. *Integral Equations Operator Theory*, 50(3) :385–391, 2004.

[39] D. Li and H. Queffélec. *Introduction à l'étude des espaces de Banach : analyse et probabilités*. Collection SMF. : Cours spécialisés. Société mathématique de France, 2004.

[40] R.H. Lohman and P.G. Casazza. A general construction of spaces of the type of R. C. James. *Canad. J. Math.*, 27(6) :1263–1270, 1975.

[41] J.W. Milnor and J.D. Stasheff. *Characteristic classes*. Annals of mathematics studies. Princeton University Press, 1974.

[42] R. Mneimné. *Réduction des endomorphismes : tableaux de Young, cône nilpotent, représentations des algèbres de Lie semi-simples*. Tableau noir. Calvage et Mounet, 2006.

[43] A. Montes-Rodríguez and H.N. Salas. Supercyclic subspaces : Spectral theory and weighted shifts. *Adv. Math.*, 163(1) :74 – 134, 2001.

[44] K. R. Parthasarathy. *Introduction to probability and measure*. Springer-Verlag, 1977.

[45] S. Rolewicz. On orbits of elements. *Studia Math.*, 32 :17–22, 1969.

[46] H.N. Salas. Hypercyclic weighted shifts. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(3) :pp. 993–1004, 1995.

[47] H.N. Salas. Supercyclicity and weighted shifts. *Studia Math.*, 135(1) :55–74, 1999.

[48] S. Shkarin. Universal elements for non-linear operators and their applications. *J. Math. Anal. Appl.*, 348(1) :193–210, 2008.

[49] S. Shkarin. Chaotic banach algebras. *ArXiv e-prints*, aug 2010.

[50] I. Singer. *Bases in Banach spaces I*. Number vol. 1 in Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Springer-Verlag, 1970.

[51] H. Totoki. The mixing property of gaussian flows. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, 18(2) :136–139, 1964.

[52] P. Walters. *An introduction to ergodic theory*. Graduate Texts in Mathematics Series. Springer London, Limited, 2000.